Kohärenz

Elektromagnetische Wellen sind transversal, d.h. $\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{k}$. Es gilt das Superpositionsprinzip, resultiert aus Linearität der Maxwellgleichungen.

Messgröße in der Röntgenstreuung ist die Intensität.

Poynting Vektor $\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})}$ $\left[\frac{W}{m^2} \right]$

„Energie pro Zeiteinheit pro Fläche in einer EM-Welle"

Betrachtung ebener Wellen

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$
$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$\vec{S}$ fluktuiert mit der Frequenz 2ω !

optisches Licht $\quad \omega \sim 10^{14} - 10^{15}$ Hz

x-Rays $\quad \omega \sim 10^{17} - 10^{18}$ Hz

Das bedeutet, es ist schwierig $S(t)$ direkt aufzulösen.

Wir messen im allgemeinen einen zeitlichen Mittelwert!

$$\boxed{\langle S(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} S(t)\, dt}$$

Beispiele zum zeitlichen Mittelwert

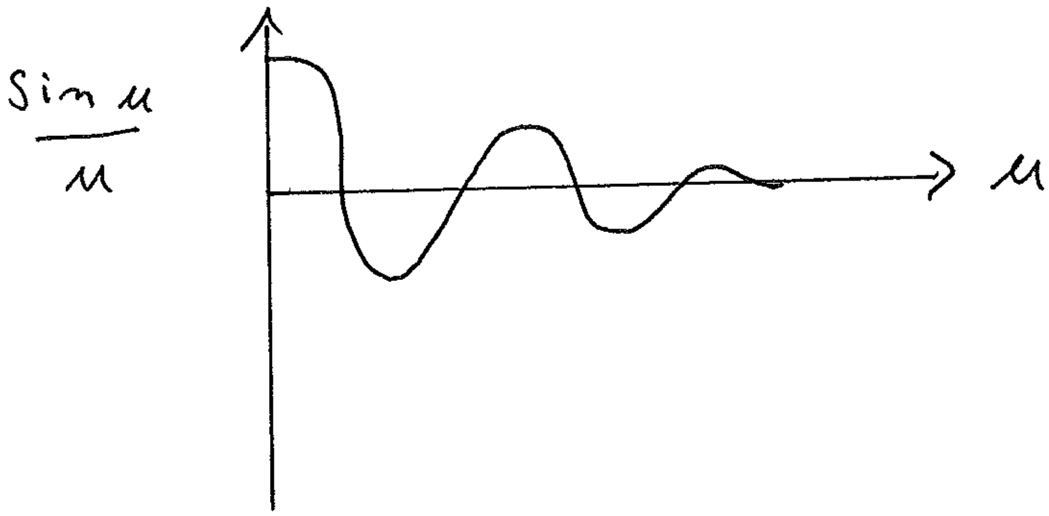
(1) $$\langle e^{i\omega t} \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} e^{i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{i\omega T} e^{i\omega t} \Big|_{t-T/2}^{t+T/2}$$

$$= \frac{1}{i\omega T} e^{i\omega t} \left(e^{i\omega T/2} - e^{-i\omega T/2} \right)$$

$$= e^{i\omega t} \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}}$$

$\longrightarrow 0$ für $\underline{\omega T \gg 1}$



Das heißt $\langle e^{i\omega t} \rangle_T = 0$, also auch

$$\langle \cos \omega t \rangle_T = \langle \sin \omega T \rangle_T = 0$$

(2)
$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \cos^2(\omega t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \left(1 + \underbrace{\cos(2\omega t)}_{\substack{\approx 0 \text{ für } \omega T \gg 1 \\ \text{siehe oben}}}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} dt = \frac{1}{2}$$

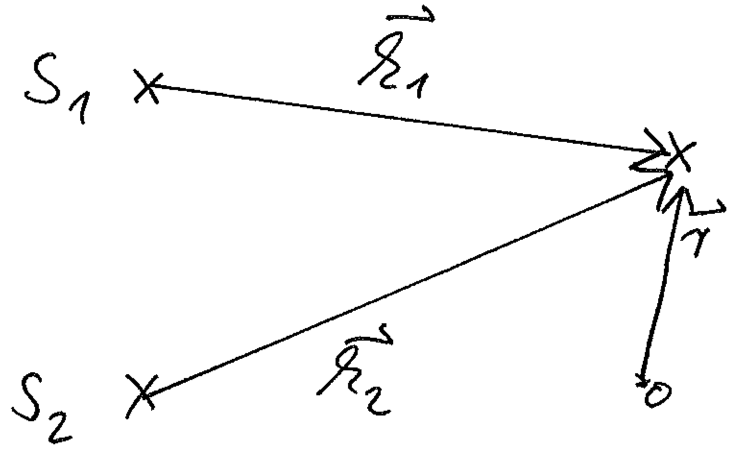
also z.B. $\langle S(t) \rangle_T = \frac{1}{2\mu_0} \vec{E_0} \times \vec{B_0}$

Interferenz

Bisher: nur eine Welle wurde betrachtet. Jetzt wollen wir wissen was passiert, wenn zwei Wellenzüge an einem Ort zur Überlagerung kommen.

Licht ist eine vektorielle Größe beschrieben durch die Maxwell-gleichungen. Es gilt das Superpositionsprinzip!

Zwei Quellen S_1 und S_2 emittieren Wellen, die am Ort $\vec{r}$ zur Überlagerung kommen.



Wir nehmen wieder ebene Wellen an.

Welle von S_1 $\qquad \vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{01}\cos(\vec{k}_1\cdot\vec{r} - \omega t + \varepsilon_1)$

Welle von S_2 $\qquad \vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_{02}\cos(\vec{k}_2\cdot\vec{r} - \omega t + \varepsilon_2)$

mit den beiden Phasen ε_1 und ε_2, die Eigenschaften der Quellen S_1 und S_2 sind.

Die resultierende instantane Welle am Ort $\vec{r}$ ist:

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_1(r,t) + \vec{E}_2(r,t)$$

Die resultierende zeitlich gemittelte Intensität ist

$$I \sim \langle E(r,t)^2\rangle_T = \langle E_1^2(\vec{r},t)\rangle_T + \langle E_2^2(r,t)\rangle_T$$
$$+ 2\,\langle E_1(r,t)\cdot E_2(r,t)\rangle$$

Wir betrachten ab jetzt nur noch die E-Felder!

$2 \; \langle \vec{E}_1(r,t) \cdot \vec{E}_2(r,t) \rangle_T$ Interferenzterm

$\langle E_1^2(r,t) \rangle_T$ Intensität der Welle von S_1

$\langle E_2^2(r,t) \rangle_T$ Intensität der Welle von S_2

<u>Interferenzterm</u>

$$\vec{E}_1(r,t) \cdot \vec{E}_2(r,t) = \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cdot \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon_1)$$
$$\times \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon_2)$$

Skalarprodukt: Interferenz nur mit den kollinearen Anteilen der Welle (Polarisation !)

$$= \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cdot \left[\cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varepsilon_1) \cos(\omega t) + \sin(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varepsilon_1) \cdot \sin(\omega t) \right]$$
$$\times \left[\cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varepsilon_2) \cos(\omega t) + \sin(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varepsilon_2) \sin(\omega t) \right]$$

Jetzt bilden wir das zeitliche Mittel $\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle_T$

$$= \frac{\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}}{2} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varepsilon_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \varepsilon_2) = I_{12}$$

NB: Terme ungerade in $\cos(\omega t)$ bzw. $\sin(\omega t)$ verschwinden

gesamt intensität $$I_G = I_1 + I_2 + I_{12}$$

mit $$I_{12} = \frac{\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_{02}}{2} \cos(\delta)$$

mit $\delta = \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varepsilon_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \varepsilon_2$
Phasendifferenz der Strahlen

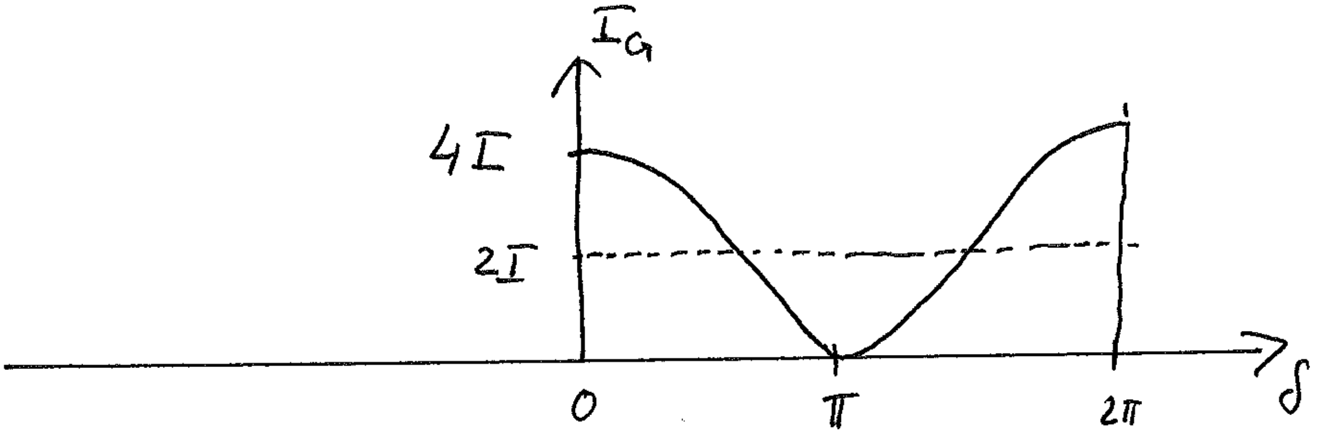
Wiederum $\vec{Q} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2 \Rightarrow$ $$\delta = \underbrace{\vec{Q} \circ \vec{r}}_{\text{Weg}} + \underbrace{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}_{\text{Quellen}}$$

also $$\boxed{I_G = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta}$$

Minima bei $\delta = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$ $\quad I_G = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$

Maxima bei $\delta = 0, 2\pi, \ldots$ $\quad I_G = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$

Nehmen wir an, dass $I_1 = I_2$



Die Intensität fluktuiert zwischen den Werten 0 und 4I.

Definition: Visibility: $V = \dfrac{I_{Max} - I_{Min}}{I_{Max} + I_{Min}} = 1$

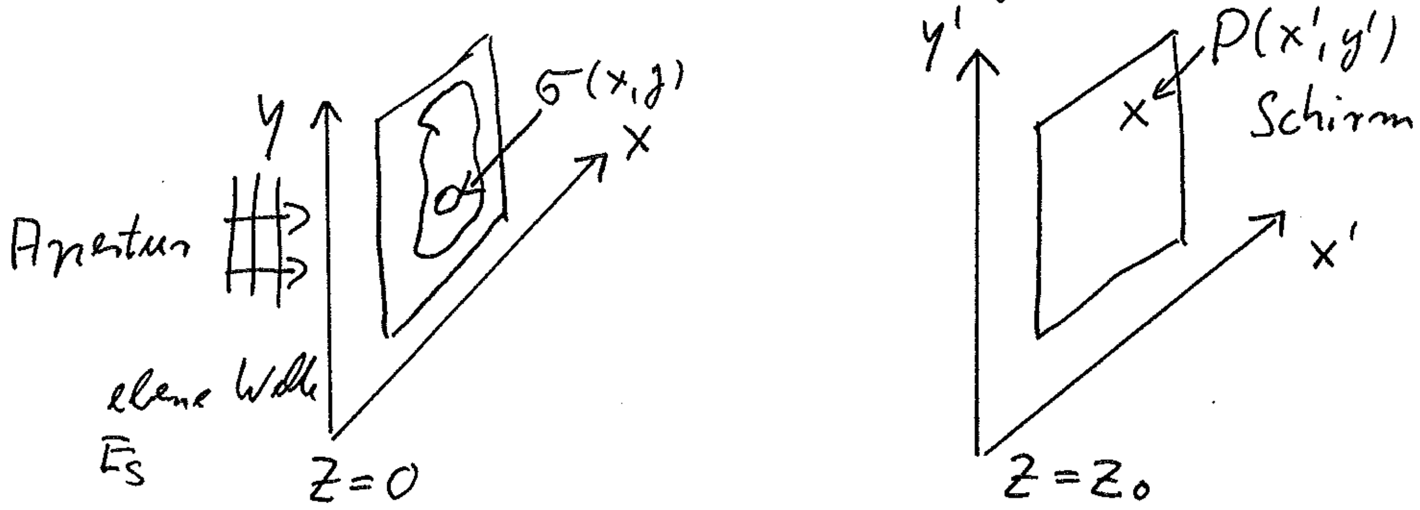
Dies ist ein Grad der Kohärenz!

$V = 1$	kohärent
$0 < V < 1$	partiell kohärent
$V = 0$	inkohärent

Solange $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ fest ist, sind die Wellen kohärent.

Aber wenn $\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t) = \phi(t)$ dann ändert sich $\langle \cos \delta \rangle_T$ und im Extremfall gilt $\langle \cos \delta \rangle_T = 0$ für $\phi(t)$ Zufallszahl. $\Rightarrow V = 0$ d.h. inkohärent

Kohärente Beleuchtung von Aperturen und das Fresnel-Kirchhoff Diffraktions Integral



jedes infinitisemale Flächenelement $d\sigma(x,y)$ emittiert Sekundärwellen, die zur Amplitude am Ort $P(x',y')$ auf dem Schirm beitragen:

$$dE_P = c \cdot \frac{E_S}{|r|} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \, d\sigma$$

mit $c = \dfrac{\cos\theta}{i\lambda}$ Inklinationsfaktor

Näherungen: (a) $r \gg$ größe der Apertur

(b) $|r| \approx z_0$

(c) $\cos\theta \approx 1$

Für die Phase $\vec{k}\cdot\vec{r}$ brauchen wir eine Taylor-entwicklung von r ($|r| = z_0$ ist langweilig)

$$r = \sqrt{z_0^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2}$$
$$\approx z_0 \left(1 + \frac{(x-x')^2}{2 z_0^2} + \frac{(y-y')^2}{2 z_0^2} + \dots \right)$$

damit ist das Feld am Ort P gegeben durch:

$$E(x', y', z_0) = \iint_\sigma \frac{\cos\theta}{i\lambda} \frac{E_S(x,y)}{r} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \, dx\, dy$$

$$= \frac{e^{-ikz_0}}{i\lambda z_0} \iint_\sigma E_S(x,y) \, e^{-i\frac{k}{2z_0}\left[(x-x')^2 + (y-y')^2\right]}$$

Fresnel - Näherung

nächste Näherung $\qquad z_0 \gg \frac{1}{\lambda}(x^2+y^2)$

(für harte Röntgenstrahlen nicht immer leicht zu erfüllen!)

dann haben wir

$$r \approx z_0\left(1 + \frac{xx'}{z_0^2} + \frac{yy'}{z_0^2}\right) \quad \text{Fraunhofer Näherung}$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{E(x',y',z_0) = \frac{e^{-ikz_0}}{i\lambda z_0} \iint\limits_{\sigma} E_S(x,y)\, e^{-\frac{ik}{z_0}(xx'+yy')}\, dx\, dy}$$

Das Feld auf dem Schirm ist proportional zur Fourier-Transformierten des Feldes in σ !