

Der Sättigungsbereich

- Im diskutierten low und high Gain Bereich hängen die Ausgangsleistung und die eingekoppelte Leistung linear zusammen
- Überschreitet die eingekoppelte Leistung W_{ext} einen bestimmten Wert, nimmt die Leistung nicht mehr linear zu und erreicht irgendwann die Sättigung – dieser Bereich wird dann als nicht linearer oder Sättigungsbereich bezeichnet
- Im Sättigungsbereich lassen sich keine analytischen Lösungen mehr finden und das Problem muß numerisch gelöst werden
- Es soll im folgenden die prinzipielle Methode zur Lösung beschrieben werden und deren Ergebnisse diskutiert werden.

FEL Parameter

- Der FEL Verstärker kann durch die folgenden Parameter beschrieben werden

l_u	Länge des Undulators
k_u	Undulatorwellenzahl
H_u	Magnetfeld des Undulators
ω	Frequenz der FEL Strahlung
T_0	Nomienelle Energie des Elektronenstrahl
j_0	Elektronenstromdichte am Anfang des Undulator
$\langle \Delta T^2 \rangle$	Energieverteilung des Elektronenstrahl
E_{ext}	Amplitude des eingekoppelten Master Signals

- Wir nehmen im folgenden als Energieverteilung eine Gaussverteilung an

FEL Parameter

- Durch die Wahl von geeigneten dimensionslosen Variablen, kann die Beschreibung auf 6 Parameter reduziert werden.

$$\hat{l}_u = \Gamma l_u$$

Länge des Undulators

$$\hat{C}$$

Detuning Parameter

$$\hat{\Lambda}_p^2$$

Raumladungparameter

$$\hat{\Lambda}_T^2$$

Energieverteilung des Elektronenstrahl

$$\hat{\rho}$$

Effizienzparameter

$$\hat{E}_{\text{ext}} = E_{\text{ext}}/E_0 = \frac{eKE_{\text{ext}}}{\rho T_0 \Gamma \gamma}$$

Normierte Master Amplitude

- Für den linearen Bereich reichen sogar

$$\hat{l}_u, \hat{C}, \hat{\Lambda}_p^2, \text{ und } \hat{\Lambda}_T^2$$

aus.

Der Sättigungsbereich – Hamiltonfunktion

- Aufgrund der verschiedenen Näherungen, die wir gemacht haben, muß für den Effizienzparameter

$$\rho \ll 1$$

gelten.

- Wenn ρ sehr klein ist, wird das FEL Feld \tilde{E}_{out} nicht mehr von ρ abhängen und somit erhält man

$$\tilde{E}_{\text{out}} = \mathcal{D}(\hat{I}_u, \hat{C}, \hat{\Lambda}_\rho^2, \hat{\Lambda}_T^2, \hat{E}_{\text{ext}})$$

- Im Bereich der Sättigung wird die Ausgangsamplitude E_{out} nicht mehr von \hat{I}_u und \hat{E}_{ext} abhängen, so daß dort dann gelten wird

$$\tilde{E}_{\text{sat}} = \mathcal{D}(\hat{C}, \hat{\Lambda}_\rho^2, \hat{\Lambda}_T^2)$$

FEL Verhalten im Sättigungsbereich

- Der Elektronenstrahl wird durch N Makropartikel pro Intervall $(0, 2\pi)$ über die Phase ψ simuliert. Die reduzierte Stromdichte ist periodisch in der Phase und ergibt sich zu

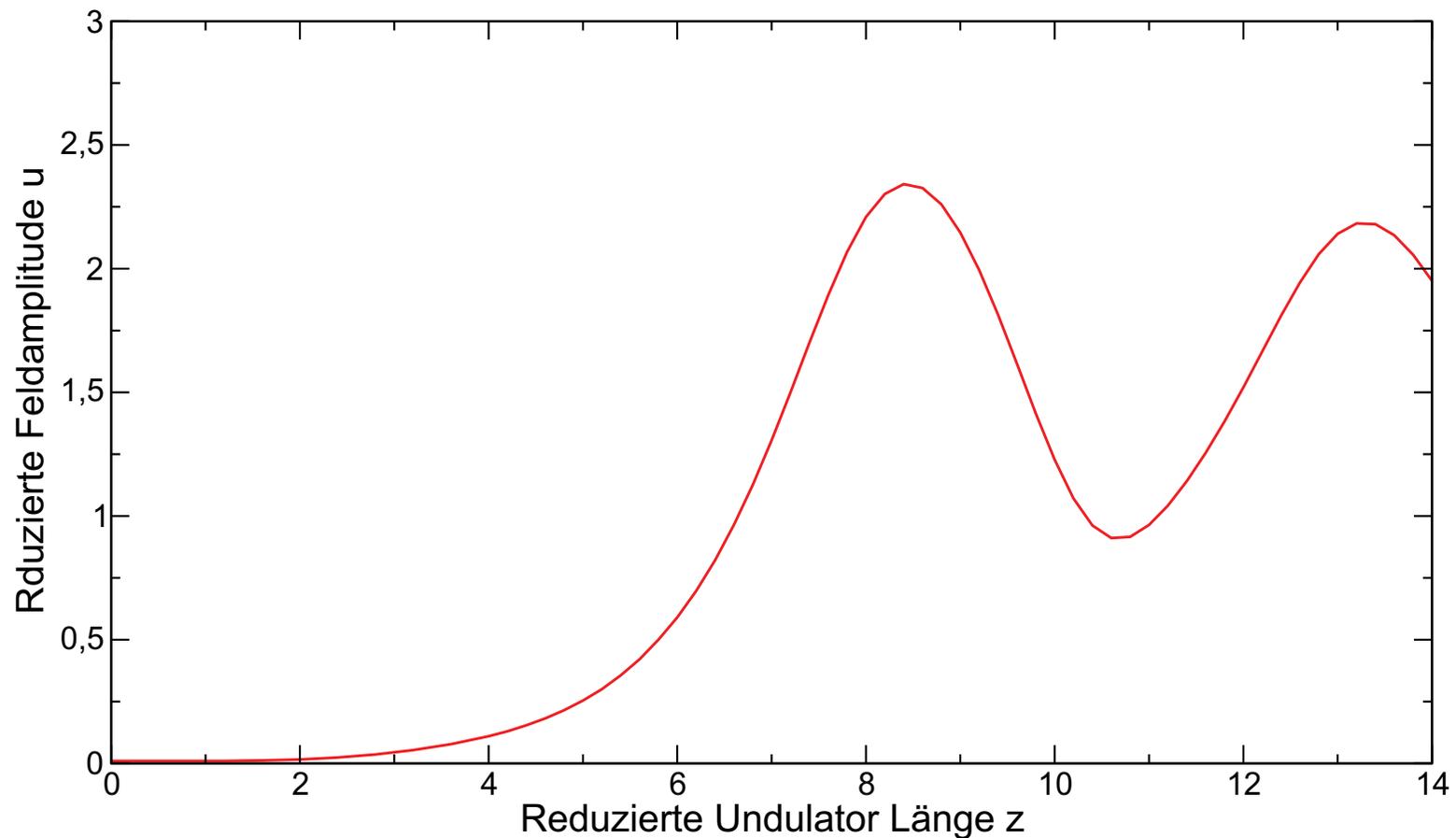
$$\hat{j}_z = -\frac{2\pi}{N} \sum_{j=1}^N \delta(\psi - \psi_{(j)}), \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi$$

$$\hat{j}_z(\psi + 2\pi \cdot n, z) = \hat{j}_z(\psi, z)$$

- Damit hat man dann $2N + 2$ Gleichungen, die den Verstärkungsprozess beschreiben.
- Wie sehen die Lösungen dieser numerischen Simulationen aus ?

FEL Verhalten im Sättigungsbereich

- Reduzierte Feldamplitude \hat{u} in Abhängigkeit von der reduzierten Undulatorlänge \hat{z} ($\hat{C} = 0, \hat{\Lambda}_p^2 \rightarrow 0, \hat{\Lambda}_T^2 = 0, \hat{u}_{\text{ext}} = 0.1$)



Sättigungsbereich

- Das Feld \hat{u} steigt bis zu einem Maximalwert an und fällt dann wieder ab.
- Im Maximum ist der Elektronenbunch vollständig durchmoduliert
- Für einen längeren Undulator fallen ein Teil der Elektronen in die Beschleunigungsphase des ponderomotiven Potentials und es wird wieder Energie aus dem FEL Feld an den Elektronenstrahl übertragen.
- Das Verhalten läßt sich gut im Phasenraum $(\hat{P}, \Delta\psi)$ betrachten. $\Delta\psi = \psi + \psi_0$ ist die Phase relativ zur Phase ψ_0 des ponderomotiven Potentials.

FEL – Phasenraum

- 1 Unmodulierter Strahl am Eingang des Undulators ($\hat{z} = 0$)
- 2 Verteilung im linearen Bereich ($\hat{z} = 4$)
- 3 Kurz vor dem Sättigungsbereich ($\hat{z} = 7$)
- 4 Sättigung ($\hat{z} = 8.4$)

Der SASE Prozess

- Bis jetzt wurde immer nur der Fall eines Verstärkers betrachtet, bei dem ein externes Feld E_{ext} eingekoppelt und dieses dann im Undulator bis zur Sättigung verstärkt wird. Woher erhalten wir aber ein geeignetes, externes Feld ?
- Das Feld kann in dem Undulator selbst in Form von spontan emittierter Synchrotronstrahlung erzeugt werden. Ein FEL Verstärker, der in diesem Modus betrieben wird, wird als **SASE FEL** bezeichnet

SASE: Self-amplified spontaneous emission

- Ursache der Synchrotronstrahlung sind Dichtefluktuationen im Elektronenstrahl, die durch das **Shot Noise (Schrotrauschen)** beschrieben werden.
- Beschreibung der Statistik des Elektronenstrahls

Schrotrauschen des Elektronenstrahls

- Der Elektronenstrahl besteht aus einer großen Zahl N von Elektronen und kann durch

$$I(t) = -e \sum_{k=1}^N \delta(t - t_k)$$

beschrieben werden. t_k ist die zufällige Ankunftszeit eines Elektrons e am Undulatoreingang.

- Die Mittlere Verteilung entspricht dem Elektronenbunchprofil und ist durch

$$\langle I(t) \rangle = -e \cdot N \cdot F(t)$$

gegeben.

- Für ein Gaussprofil wäre

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_T} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_T^2}\right)$$

Schrotrauschen des Elektronenstrahls

- Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron in der Zeit $t, t + dt$ am Undulatoreingang ankommt ist genau $F(t)$
- Wir definieren die Fouriertransformierte

$$\bar{I}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} I(t) e^{i\omega t} dt = -e \sum_{k=1}^N e^{i\omega t_k}$$

$$I(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{I}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = -e \sum_{k=1}^N \delta(t - t_k)$$

- Die Fouriertransformierte $\bar{I}(\omega)$ kann somit als die Summe einer großen Zahl von komplexen Phasen mit dem zufälligen Wert $\phi_k = \omega t_k$ beschrieben werden.

Schrotrauschen des Elektronenstrahls

- Sei nun die Dauer des Elektronbunches σ_T so lang, das

$$\omega \cdot \sigma_T \gg 1$$

ist. Dann können die Phasen als gleichmäßig über das Intervall $(0, 2\pi)$ verteilt betrachtet werden.

- In diesem Fall kann der Zentrale Grenzwertsatz angewandt werden und das bedeutet, daß der Real und der Imaginäranteil von $\bar{I}(\omega)$ normalverteilt sind.

$$p(\text{Re}\bar{I}(\omega)) = \frac{1}{\langle \text{Re}\bar{I}(\omega) \rangle} \exp\left(-\frac{\text{Re}\bar{I}(\omega)^2}{\langle \text{Re}\bar{I}(\omega) \rangle}\right)$$

Korrelationsfunktionen

- Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Verteilung $|\bar{I}(\omega)|^2$ hat damit die Form

$$p(|\bar{I}(\omega)|^2) = \frac{1}{\langle |\bar{I}(\omega)|^2 \rangle} \exp\left(-\frac{|\bar{I}(\omega)|^2}{\langle |\bar{I}(\omega)|^2 \rangle}\right)$$

einer negativen Exponentialfunktion.

- Spektrale Korrelationsfunktion 1. Ordnung**

$$\begin{aligned} \langle \bar{I}(\omega) \bar{I}^*(\omega') \rangle &= e^2 \left\langle \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N \exp(i\omega t_k - i\omega' t_n) \right\rangle \\ &= e^2 \left\langle \sum_{k=1}^N \exp(i(\omega - \omega') t_k) \right\rangle + e^2 \sum_{k \neq n} \langle \exp i\omega t_k \rangle \langle \exp i\omega' t_n \rangle \end{aligned}$$

Korrelationsfunktionen

- Es ist

$$\langle \exp i\omega t_k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(t_k) \exp(i\omega t_k) dt_k = \bar{F}(\omega) = \exp\left(-\frac{\omega^2 \sigma_T^2}{2}\right)$$

die Fouriertransformierte des Gaussprofils $F(t)$

- Damit ist dann

$$\langle \bar{I}(\omega) \bar{I}^*(\omega') \rangle = e^2 N \bar{F}(\omega - \omega') + e^2 N(N - 1) \bar{F}(\omega) \bar{F}^*(\omega')$$

- Wenn

$$N |\bar{F}(\omega)|^2 \ll 1,$$

dann ist der zweite Term vernachlässigbar und es ist

$$\langle \bar{I}(\omega) \bar{I}^*(\omega') \rangle = e^2 N \bar{F}(\omega - \omega').$$

Damit trägt nur der Teil bei, der das Schrotrauschen $e^2 N$ beschreibt.

Korrelationsfunktionen

- Die obige Bedingung ist i.A. erfüllt. Es war vorausgesetzt, daß

$$\omega\sigma_T \gg 1$$

$$\omega\sigma_T = 10 \Rightarrow \exp(-100) \cong 10^{-44}$$

N (Zahl der Elektronen im Bunch) ist typisch im Bereich von 10^{11}

$$\Rightarrow N \cdot |\bar{F}(\omega)|^2 \ll 1$$

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Die bis jetzt hergeleitete Theorie des FEL im linearen Bereich wurde für die Bedingung eines unmodulierten Elektronenstrahls und eines Mastersignals E_{ext} durchgeführt, daß mit der Frequenz ω moduliert ist.
- Das Ausgangssignal E_{out} hat dann die gleiche Frequenz ω und wächst im linearen, high Gain Bereich exponentiell mit der Undulatorlänge z $\tilde{E}(\omega, z) \propto \exp(\Lambda z)$
- Man kann dann zeigen, daß ein mit der Frequenz ω modulierter Elektronenstrahl ohne externes Mastersignal E_{ext} im wesentlichen zum gleichen Ergebnis führt
- Wir betrachten jetzt den komplizierten Fall, daß das Eingangssignal durch das Schrotrauschen gegeben ist, daß ein weißes Rauschen besitzt.

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Im linearen Bereich werden alle Frequenzen unabhängig voneinander verstärkt. Deshalb zerlegen wir das Eingangssignal in seine Fourierkomponenten und berechnen für jede Harmonische die Verstärkung.

- Das Laserfeld wird durch

$$\bar{E}(\omega, z) = \tilde{E}(\omega, z) \exp(i\omega(z/c) - t) + C.C.$$

beschrieben.

- Die Verknüpfung zwischen der Zeit und Frequenzdomäne ist durch

$$E(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(\omega, z) \exp(-i\omega t) d\omega$$

gegeben.

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Wir nehmen an, daß die transversale Komponenten des Schrotrauschens am Eingang des Undulators direkt mit dem Schrotrauschen des Strahlstroms verknüpft ist.

$$\frac{\bar{j}(\omega)}{j_0} = \frac{\bar{I}(\omega)}{I_0}$$

- Wir betrachten nun einen Elektronenbunch mit der Dauer T , so daß gilt

$$\rho\omega_0 T \gg 1.$$

(Resonanzfrequenz ω_0 , Effizienzparameter ρ)

- Diese Bedingung bedeutet, daß der Elektronenbunch viel länger ist, als die *Slippage* der FEL Strahlung relativ zum Elektronenbunch, Durch diese Annahme können Randeffekte vernachlässigt werden.

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Ursache der *Slippage* sind die unterschiedlichen Geschwindigkeiten der FEL Strahlung und des Elektronenbunches in z -Richtung
- Es soll nun aus dem Elektroneneingangsstrom $I(t)$ bzw. $\bar{I}(\omega)$ das elektrische Feld $E(z, t)$ bzw. $\bar{E}(\omega, z)$ berechnet werden. Die Fourierkomponenten sind über eine Green'sche Funktion $\mathcal{G}(\omega, z)$ gekoppelt.

$$\bar{E}(\omega, z) = \mathcal{G}(\omega, z) \bar{I}(\omega)$$

Für $\omega < 0$ ist

$$\bar{E}^*(\omega, z) = \bar{E}(-\omega, z)$$

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Wir betrachten den Fall eines vernachlässigbaren Raumladungsfeld $\hat{\Lambda}_p^2 \rightarrow 0$ und einer scharfen Geschwindigkeitsverteilung des Elektronenstrahls $\hat{\Lambda}_T^2 = 0$. Im linearen Bereich sind die Propagationskonstanten $\hat{\Lambda}$ durch die Lösungen von

$$\hat{\Lambda}(\hat{\Lambda} + i\hat{C})^2 = i \quad (41)$$

gegeben.

- Wir betrachten nur die Lösung, die das exponentielle Wachstum beschreibt. In 0. Ordnung ($\hat{C} = 0$) war die Lösung

$$\hat{\Lambda} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$$

- Durch Entwickeln der Lösungen von (41) um $\hat{C} = 0$ erhält man

$$\operatorname{Re}\hat{\Lambda} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{\hat{C}^2}{9} \right) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}\hat{\Lambda} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4\hat{C}}{3} \right)$$

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Damit ist die Green'sche Funktion dann durch

$$\mathcal{G}(\omega, z) = \frac{2}{3} \exp(i\frac{\omega}{c}z) \exp \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{\hat{C}^2}{9} \right) \hat{z} + \frac{i}{2} \left(1 - \frac{4\hat{C}}{3} \right) \hat{z} \right] \frac{E_0}{I_0}$$

gegeben. Einsetzen liefert sofort das gewünschte Ergebnis.

- Aus der Green'schen Funktion folgt, daß der SASE FEL im linearen Bereich nur ein schmales Frequenzband um die Resonanzfrequenz ω_0 verstärkt.
- Mit

$$\hat{C} = (\omega - \omega_0) / (2\rho\omega_0)$$

berechnet sich die Bandbreite $\Delta\omega$ zu

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \omega - \omega_0 = 2\rho\omega_0 \hat{C} \\ &\cong \rho\omega_0 \hat{C} \cong \rho\omega_0 \end{aligned}$$

- Das Spektrum eines einzelnen, die Dauer T besitzenden Bunches sollte Spikes mit einer typischen Breite $1/T$ besitzen

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

⇒ Zahl der Spikes (Wellenpakete) sollte dann ungefähr

$$\frac{\Delta\omega}{1/T} \cong \rho\omega_0 T$$

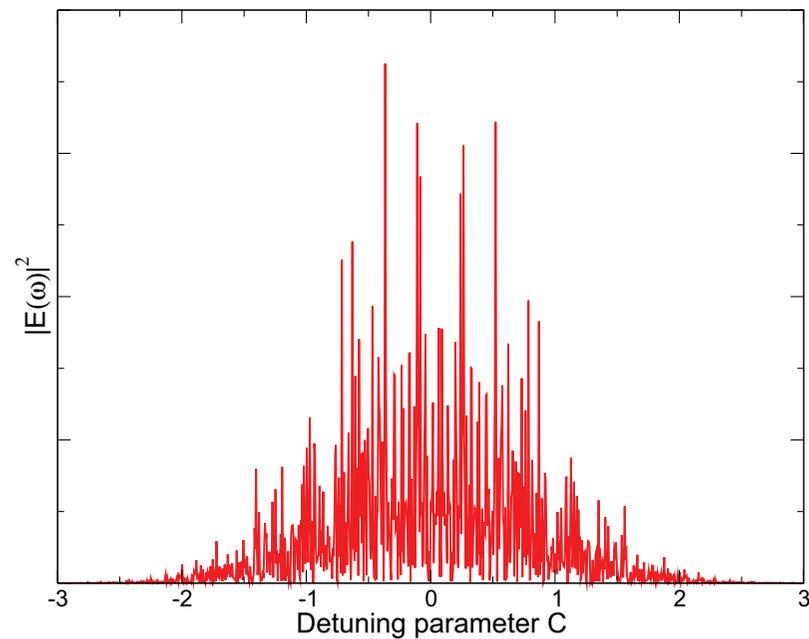
betragen.

- Die typischen Dauer eines Spikes sollte dann $1/(\rho\omega_0)$ sein.
- Wie sieht nun das Spektrum hinter dem Undulator aus ?
- Wie groß ist jetzt die Leistung am Ausgang des FEL ?

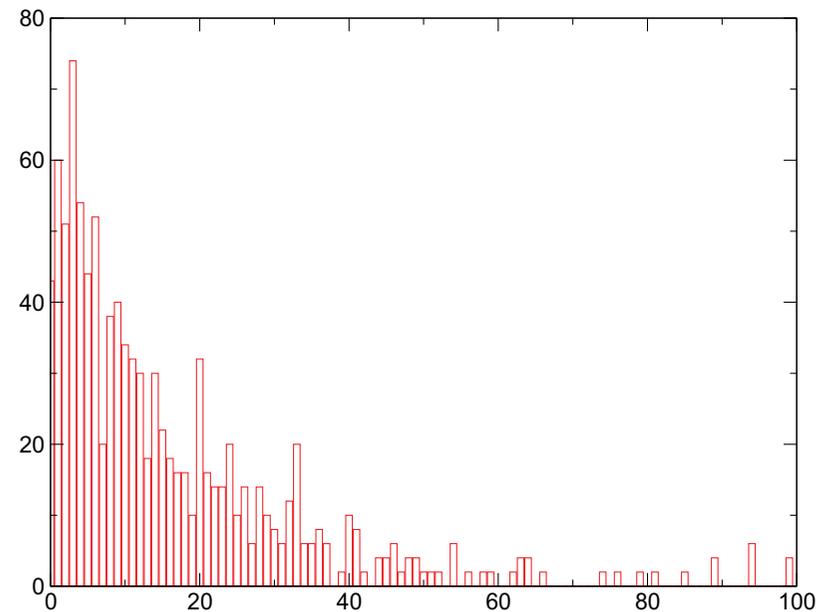
1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Simulation eines Elektronenbunches mit nur 1000 Elektronen

Feld nach dem Undulator mit
 $\hat{z} = 10$



Statistik des Elektronenstrahls
am Eingang des FEL



1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Die Leistung ist durch den Pointing Vektor gegeben

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{cS}{4\pi} \int_0^T E^2(t) dt \\
 &= \frac{cS}{4\pi} \int_0^T \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{E}(\omega, z) \exp(-i\omega t)|^2 d\omega dt \\
 &= \frac{cS}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{E}(\omega, z)|^2 d\omega \cdot \int_0^T |\exp(-i\omega t)|^2 dt \\
 &= \frac{cS}{8\pi} 2 \cdot \int_0^{\infty} |\bar{E}(\omega, z)|^2 d\omega \\
 &= \frac{cS}{4\pi} \int_0^{\infty} |\bar{E}(\omega, z)|^2 d\omega
 \end{aligned}$$

S ist die transversale Ausdehnung des Elektronenstrahl

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Die Leistung, gemittelt über viele Elektronenbunche ist durch

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{cS}{4\pi} \int_0^\infty \langle |\bar{E}(\omega, z)|^2 \rangle d\omega \quad (42)$$

gegeben.

$$\begin{aligned} \langle |\bar{E}(\omega, z)|^2 \rangle &= \langle |\mathcal{G}(\omega, z)\bar{I}(\omega)|^2 \rangle \\ &= \langle |\mathcal{G}(\omega, z)|^2 \rangle \langle |\bar{I}(\omega)|^2 \rangle \end{aligned}$$

- Von der Green'schen funktion $\mathcal{G}(\omega, z)$ liefert nur der Realteil

$$\exp \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{\hat{C}^2}{9} \right) \hat{z} \right]^2 = \exp(\sqrt{3}\hat{z}) \cdot \exp \left[\sqrt{3} \frac{\hat{C}^2}{9} \hat{z} \right]$$

einen Beitrag.

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Da

$$\hat{C} = (\omega - \omega_0)/(2\rho\omega_0)$$

läßt sich $\langle |\bar{E}(\omega, z)|^2 \rangle$ schreiben als

$$\langle |\bar{E}(\omega, z)|^2 \rangle = A \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma_A^2}\right] \langle |\bar{I}(\omega)|^2 \rangle$$

mit

$$A = \frac{4}{9} \left(\frac{E_0}{I_0}\right)^2 \exp(\sqrt{3}\hat{z}) \quad \text{und} \quad \sigma_A = 3\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\rho\omega_0}{\sqrt{\hat{z}}}}$$

- Integration von $\langle |\bar{E}(\omega, z)|^2 \rangle$ liefert dann

$$\langle W_{\text{out}} \rangle = \rho W_b \frac{\sqrt{4\pi\rho}}{3\sqrt{\sqrt{3}\hat{z}}N_\lambda} \exp \sqrt{3}\hat{z}$$

mit der Elektronenstrahlleistung $W_b = \gamma mc^2 I_0 / e$ und der Zahl der Elektronen pro Frequenzintervall $N_\lambda = 2\pi I_0 / (e\omega_0)$

Eigenschaften der SASE-FEL Strahlung

- Es sollen jetzt die Eigenschaften der SASE FEL Strahlung diskutiert werden. Die Statistik der Strahlung $|\bar{E}(\omega, z)|$ ist durch die Statistik des Elektronenstrahls $\bar{I}(\omega)$ gegeben und somit gleich

$$p(|\bar{E}(\omega, z)|^2) = \frac{1}{\langle |\bar{E}(\omega, z)|^2 \rangle} \exp\left(-\frac{|\bar{E}(\omega, z)|^2}{\langle |\bar{E}(\omega, z)|^2 \rangle}\right).$$

- Zur Analyse der Strahlung wird ein Monochromator verwendet
- Der Monochromator hinter dem Undulator wird durch eine Transmissionsfunktion $\mathcal{G}_M(\omega)$ beschrieben. Das Laserfeld ergibt sich dann aus

$$\bar{E}(\omega) = \mathcal{G}_M(\omega)\mathcal{G}(\omega, z)\bar{I}(\omega)$$

- Hinter einem schmalbandigen Monochromator ist die gemessene Intensität proportional zu $|\bar{E}(\omega)|$ und dementsprechend wird die Intensitätsverteilung hinter dem Monochromator der negativen Exponentialfunktion entsprechen.

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Diese Verteilung ist eine Eigenschaft von vollständig chaotischer polarisierter Strahlung
- Es soll zunächst die spektrale Korrelation berechnet werden
- 1. Ordnung

$$g_1(\omega, \omega') = \frac{\langle \bar{E}(\omega) \bar{E}^*(\omega') \rangle}{[\langle |\bar{E}(\omega)|^2 \rangle \langle |\bar{E}(\omega')|^2 \rangle]^{1/2}}$$

Wir hatten gezeigt, daß

$$\langle \bar{I}(\omega) \bar{I}^*(\omega') \rangle = e^2 N \bar{F}(\omega - \omega')$$

ist. Nehmen wir jetzt für den Elektronenbunch $E(z, t)$ einen Rechteckpuls der Zeit T an.

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Die Fouriertransformierte einer Rechteckfunktion ist eine Sinc Function $\sin(\omega)/\omega$. Damit kann man schreiben

$$g_1(\omega, \omega') = \bar{F}(\omega - \omega_0) = \left[\frac{(\omega - \omega')T}{2} \right]^{-1} \sin \left[\frac{(\omega - \omega')T}{2} \right]$$

- Wir definieren die spektrale Kohärenz

$$\Delta\omega_c = \int_{-\infty}^{\infty} |g_1(\omega, \omega')|^2 d(\omega - \omega')$$

- Für einen Rechteckbunch ist dies gleich

$$\Delta\omega_c = \frac{2\pi}{T}$$

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- 2. Ordnung

$$\begin{aligned}
 g_2(\omega, \omega') &= \frac{\langle |\bar{E}(\omega)|^2 |\bar{E}(\omega')|^2 \rangle}{[\langle |\bar{E}(\omega)|^2 \rangle \langle |\bar{E}(\omega')|^2 \rangle]} \\
 &= 1 + |g_1(\omega, \omega')|^2
 \end{aligned}$$

- Die mittlere Energie hinter dem Monochromator ist nun durch

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{cS}{4\pi} \int_0^\infty |\bar{E}(\omega, z)|^2 d\omega = \frac{ce^2 SN}{4\pi} \int_0^\infty |G_M(\omega)|^2 |G(\omega, z)|^2 d\omega$$

gegeben.

- Die mittlere Energie hängt also von dem Verstärkungsprofil des FEL und der Apparatfunktion des Monochromators ab.

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Definition der normierten Dispersion

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\mathcal{E}}^2 &= \frac{\langle (\mathcal{E} - \langle \mathcal{E} \rangle)^2 \rangle}{\langle \mathcal{E} \rangle} \\
 &= \frac{\int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\omega' \langle |\bar{E}(\omega)|^2 |\bar{E}(\omega')|^2 \rangle}{\int_0^\infty \langle |\bar{E}(\omega)|^2 \rangle d\omega \cdot \int_0^\infty \langle |\bar{E}(\omega')|^2 \rangle d\omega'} \\
 &= \frac{\int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\omega' \langle |\bar{E}(\omega)|^2 \rangle \langle |\bar{E}(\omega')|^2 \rangle |g_1(\omega, \omega')|^2}{\int_0^\infty \langle |\bar{E}(\omega)|^2 \rangle d\omega \cdot \int_0^\infty \langle |\bar{E}(\omega')|^2 \rangle d\omega'}
 \end{aligned}$$

- Hier geht zusätzlich noch das Profil des Elektronenbunches ein
- Für die Apparatfunktion des Monochromators nehmen wir jetzt ein Gaussprofil an

$$|G_M|^2 = \exp \left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma_M^2} \right]$$

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Die normierte Dispersion ist dann durch

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{\hat{\sigma}^2} \int_0^{\hat{\sigma}} \operatorname{erf}(x) dx \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma} = \frac{\hat{\sigma}_A \hat{\sigma}_M}{\sqrt{\hat{\sigma}_A^2 + \hat{\sigma}_M^2}}, \quad \hat{\sigma}_x = \sigma_x \cdot T$$

gegeben.

- Asymptotisch ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{E}}^2 &\cong 1 && \text{für} && \sigma_M \cdot T \ll 1 \\ \sigma_{\mathcal{E}}^2 &\cong \frac{\pi}{\sigma_M \cdot T} && \text{für} && 1 \ll \sigma_M \cdot T \ll \sigma_A \cdot T \\ \sigma_{\mathcal{E}}^2 &\cong \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma_A \cdot T} && \text{für} && \sigma_A \cdot T \ll \sigma_M \cdot T \end{aligned}$$

Grundlagen Statistische Optik

- Sei U eine Zufallsvariable und $p_U(u)$ die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Dann ist die Charakteristische Funktion $M_U(\omega)$ definiert als der Erwartungswert von $\exp(i\omega U)$.

$$M_U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega u) p_U(u) du$$

Die Dichtefunktion $p_U(u)$ berechnet sich damit aus der Fouriertransformation von $M_U(\omega)$

$$p_U(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_U(\omega) \exp(-i\omega u) d\omega$$

- Für thermisches, polarisiertes Licht ist die Dichtefunktion der Intensität durch

$$p_I(I) = \frac{1}{\langle I \rangle} \exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right)$$

gegeben ($I > 0$).

Statistische Optik

- Berechnung wurde ebend für das Schrotrauschen des Elektronenstrahls durchgeführt.
- Die Charakteristische Funktion ist damit durch die Fouriertransformierte

$$M_I(\omega) = \frac{1}{1 - i\omega \langle I \rangle} \quad (43)$$

gegeben.

- Es soll nun die integrierte Intensität betrachtet werden

$$W = \int_{-T/2}^{T/2} I(t) dt \cong \sum_{k=1}^m I_k \Delta t = \frac{T}{m} \sum_{k=1}^m I_k,$$

wobei das Integral hier durch eine Summe genähert wird. Für die Intensität I_k in jedem Intervall k von polarisierter, thermischer Strahlung, die statistisch unabhängig sind gilt nun Gleichung (43).

Statistische Optik

- Damit ist die Charakteristische Funktion $M_W(\omega)$ durch

$$M_W(\omega) \cong \left[1 - i\omega \frac{\langle I \rangle T}{m} \right]^{-m}$$

gegeben.

- Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist dann die Fouriertransformation

$$p_W(W) \cong \left(\frac{m}{\langle I \rangle T} \right)^m \frac{W^{m-1} \exp\left(-m \frac{W}{\langle I \rangle T}\right)}{\Gamma(m)} \quad (44)$$

Literatur: J.W. Goodman, Statistical Optics, John Wiley & Sons (1985)

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Wir möchte jetzt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Strahlung nach dem Monochromator $p(\mathcal{E})$ für einen kompletten Elektronenbunch berechnen.
- Dies entspricht der Integration über die Dauer T des Bunches, so daß wir Gleichung (44) anwenden.

$$p(\mathcal{E}) = \frac{M^M}{\Gamma(M)} \left(\frac{\mathcal{E}}{\langle \mathcal{E} \rangle} \right)^{M-1} \frac{1}{\langle \mathcal{E} \rangle} \exp \left(-M \frac{\mathcal{E}}{\langle \mathcal{E} \rangle} \right)$$

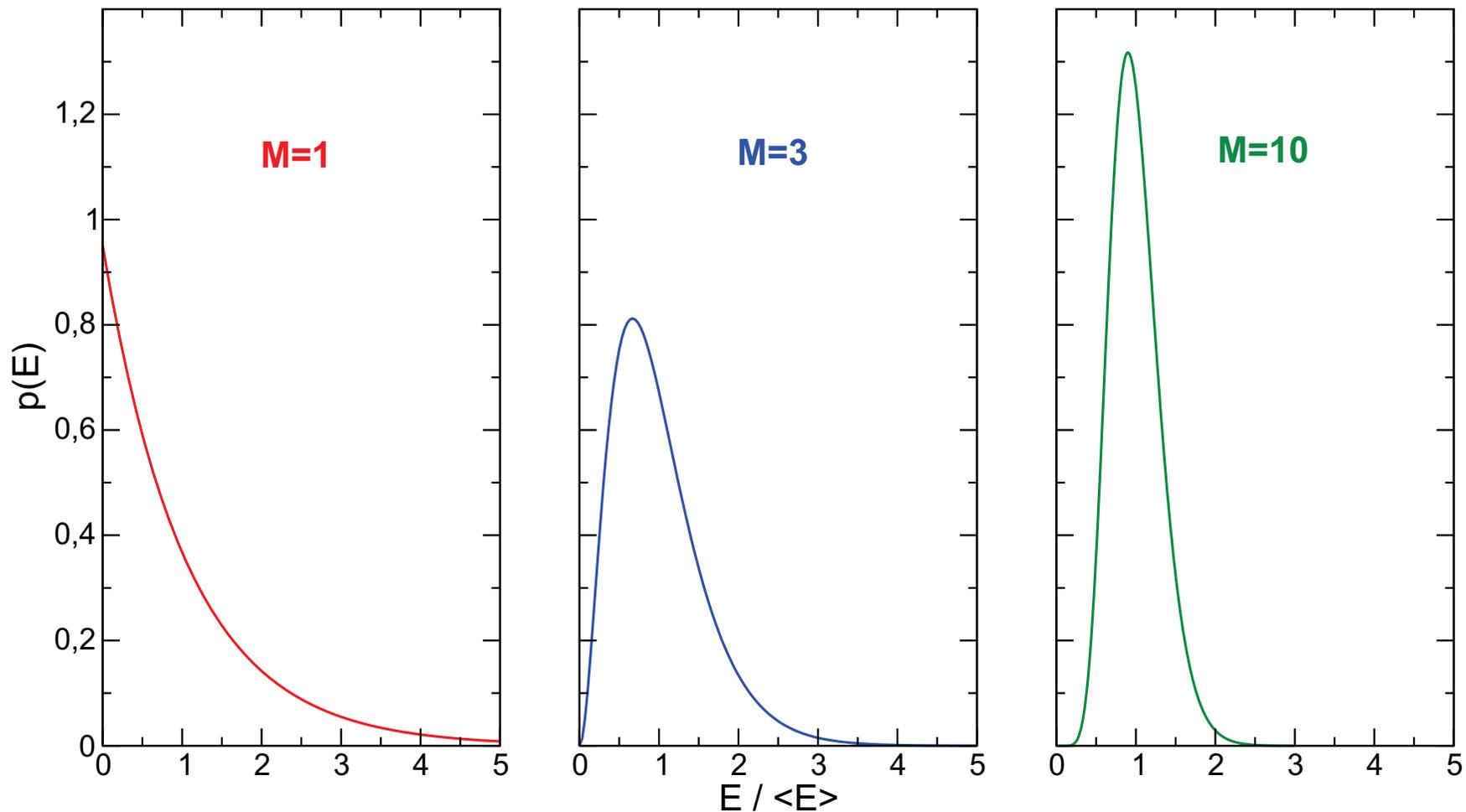
mit

$$M = \frac{1}{\sigma_{\mathcal{E}}^2}$$

- M ist die Zahl der Freiheitsgrade (Moden) in dem Strahlungspuls.

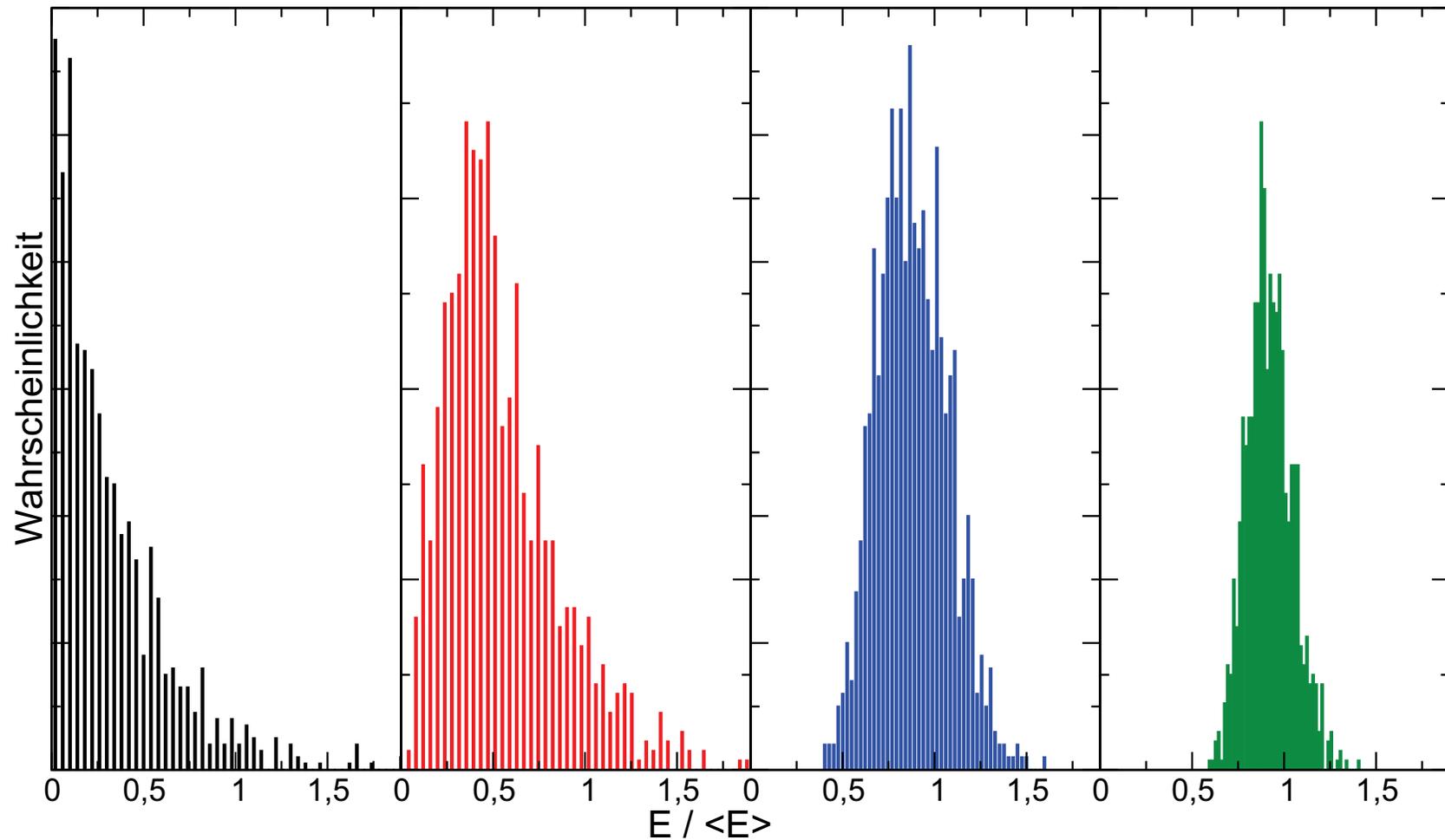
1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Wahrscheinlichkeitsverteilung der Strahlung nach einem Monochromator



1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Ergebnis einer Simulation über 1000 FEL Pulse



1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Was bedeuten nun diese Verteilungen ?
- Schmalbandiger Monochromator ($\sigma_M \cdot T \ll 1 \Leftrightarrow M \cong 1$)
Hinter dem Monochromator wird immer nur ein Spike (Wellenpaket) beobachtet. Ein Spike hat genau die Statistik einer negativen Exponentialfunktion.
Hinter einem schmalbandigen Monochromator wird also Licht beobachtet, dessen Intensität sehr stark schwankt.
- Breitbandiger Monochromator
Das Spektrum nähert sich für sehr viele Moden nach und nach einer Gauss-Funktion an
- Wie viele Moden schwingen in dem SASE FEL an ?
- Abschätzung hatte ergeben

$$\rho \omega_0 T$$

- Wie groß sind nun diese Zahlen z.B. bei FLASH ?

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Wir nehmen die folgenden Werte an
 - Elektronenbunch: Dauer $T = 100$ fs, Ladung $Q = 1$ nC, Durchmesser $D = 0.1$ mm, Elektronenenergie $E = 1$ GeV
 - FEL Strahlung: $\hbar\omega = 20$ eV
 - Undulatorparameter: $K = 1$
- Daraus ergeben sich die folgenden Werte

$$\Gamma \quad 0.957 \text{ m}^{-1}$$

$$\rho \quad 0.017$$

$$\hat{\Lambda}_p^2 \quad 0.126$$

$$\omega_0 \quad 3 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$$

- Die Zahl der Moden M liegt damit dann im Bereich

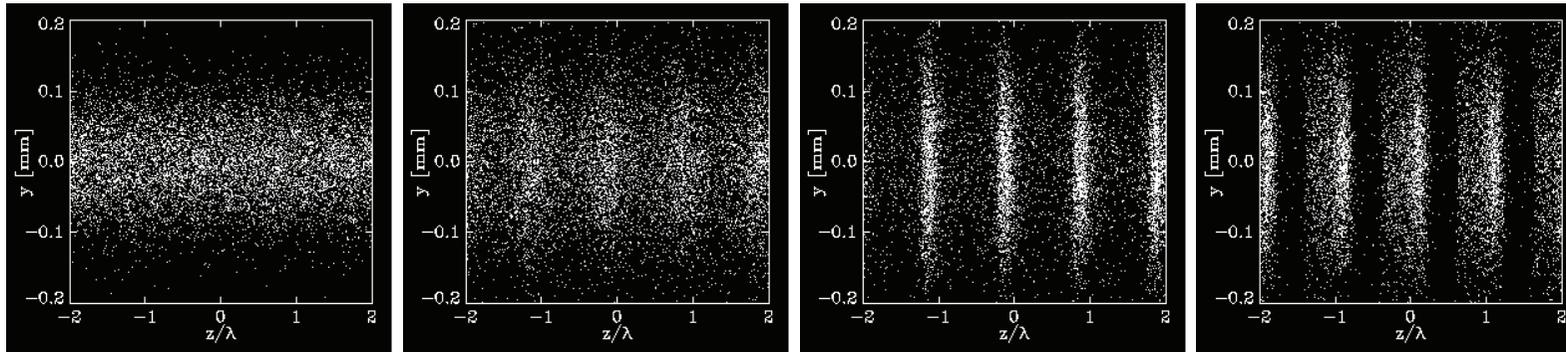
$$M \cong 100$$

- Im FEL schwingen also sehr viele Moden an!

SASE FEL – Zeitstruktur

- Die Zeitstruktur des SASE FEL ergibt sich aus der Fouriertransformation des Frequenzfrequenzspektrums
- Spektrum besteht aus vielen, sehr kurzen Spikes
- Die Zeitdauer eines Spikes kann im Bereich von einigen *fs* liegen, was für die zeitaufgelöste Experimente sehr interessant ist.
- Problem: Zeitauflösung ist durch den gesamten Elektronenbunch gegeben und nicht durch einen einzelnen Spike.

Take Home Message – SASE FEL



- Schrotrauschen des Elektronenstrahls und Bewegung im Undulator erzeugt spontane Synchrotronstrahlung
- Wechselwirkung der erzeugten Strahlung mit dem Elektronenbunch erzeugt eine Modulation des Elektronenstrahls (Microbunching)
- Höhere Teilchendichte und Kohärente Bewegung der Elektronen führt zu einer Verstärkung der Strahlung
- Vollständige Modulation führt zur Sättigung des FEL

