FEL Theorie – Linearer Bereich

- Im folgenden soll nun der Bereich hoher Verstärkung (high Gain) und später der Bereich der Sättigung betrachtet werden.
- Beschreibung im Rahmen des Hamilton Formalismus
- Felder in complexer Schreibweise

$$\text{Undulator:} \qquad B_x + iB_y = B_u e^{-ik_u z}$$

$$\text{Laser:} \qquad E_x + iE_y = \tilde{E}_L(z) \exp\left(i\omega(\frac{z}{c} - t)\right)$$

Hamilton Funktion

$$\mathcal{H}(p_z, z, t) = \left[(p_z c + eA_z)^2 + e^2(\vec{A}_\perp + \vec{A}_u)^2 + m^2 c^4\right]^{1/2} - e\Phi$$

$$\vec{A}_u = -\vec{e}_z \times \int \vec{H}_u dz \text{ Vectorpotential des Undulator}$$

- Verallgemeinerter Hamilton Formalismus
  t ist kanonisch conjugiert zu $p_0 = -\mathcal{H}$

$\rightarrow$ kanonische Koordinaten $(p_0, p_z), (t, z)$

Hamilton Formalismus

- Transformation in ein angepasstes Koordinatensystem

$(P_0, P), (z, \psi)$ mit

$$
\begin{aligned}
P &= -p_0/\omega = \frac{\mathcal{H}}{\omega} = \frac{T}{\omega} \\
P_0 &= p_z + \frac{p_0}{\omega}\left(k_u + \frac{\omega}{c}\right) \\
\psi &= k_u z + \omega\left(\frac{z}{c} - t\right)
\end{aligned}
$$

- Damit hat die Hamilton Funktion die folgende Form

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{H}}(P, \psi, z) &= -P_0 \\
\tilde{\mathcal{H}}(P, \psi, z) &= (k_u + \frac{\omega}{c})P - p_z(P, z, \psi)
\end{aligned}
$$

$$
= (k_u + \frac{\omega}{c})P + \quad eA_z/c \quad -\frac{1}{c}\left[(P\omega + e\phi)^2 - e^2(\vec{A}_\perp + \vec{A}_u)^2 - m^2c^4\right]^{1/2}
$$

Eichtransformation

- mit den kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P} \text{ und } \frac{dP}{dz} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \psi}$$

- Vier Felder:
  1. $\vec{A}_u$: Undulatorfeld
  2. $\vec{A}_\perp$: Feld der Laserwelle
  3. ϕ : Ladungsfeld der Elektronen
- Wahl einer Eichung χ für das Vectorpotential $\vec{A}$

$$\phi \to \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t}, \qquad A_z \to A_z' = A_z + \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t}$$

- Longitudinale Feldkomponente E_z bleibt damit unverändert

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial t}$$

Hamiltonfunktion

- Durch diese Wahl von χ verschwindet das Skalarpotential
$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} c \int dt \phi(z,t) = \phi - \phi = 0$$
- Das Raumladungsfeld wird somit durch A_z beschrieben
$$E_z(z,t) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial A'_z}{\partial t} \leftrightarrow E_z(\psi, z) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial A'_z(z,\psi)}{\partial \psi}$$
- Die Hamiltonfunktion $\tilde{\mathcal{H}}$ lautet somit
$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}} = (k_u + \frac{\omega}{c})\frac{T}{\omega} \quad &- \quad \frac{1}{c}\left\{T^2 - e^2(\vec{A}_\perp + \vec{A}_u)^2 - m^2c^4\right\}^{1/2} \\ &+ \quad \frac{e}{\omega}\int d\psi E_z(z,\psi)\end{aligned}$$
- Im betrachteten linearen Bereich ist das Feld des Undulators $\vec{A}_u$ viel größer als das Feld der Laserwelle $\vec{A}_\perp$
$$|\vec{A}_\perp| \ll |\vec{A}_u|$$

Hamiltonfunktion

- Damit kann die Wurzel um $\vec{A}_\perp$ entwickelt werden

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{T^2 - e^2(\vec{A}_\perp + \vec{A}_u)^2 - m^2c^4} \\
\cong \quad & \sqrt{T^2 - e^2A_u^2 - m^2c^4} \\
- \quad & \frac{e^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{T^2 - e^2A_u^2 - m^2c^4}} (2\vec{A}_\perp + 2\vec{A}_u) \cdot \vec{A}_\perp + \dots \\
= \quad & \sqrt{T^2 - e^2A_u^2 - m^2c^4} - \frac{e^2}{\sqrt{T^2 - e^2A_u^2 - m^2c^4}} \vec{A}_u \cdot \vec{A}_\perp
\end{aligned}
$$

In der Entwicklung wurden alle Terme mit $A_\perp^2$ vernachlässigt

Hamiltonfunktion

- Einsetzen in die Hamiltonfunktion liefert somit

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}} &= \frac{T}{\omega}(k_u + \frac{\omega}{c}) - \frac{1}{c}v\left\{T^2 - e^2A_u^2 - m^2c^4\right\}^{1/2} \\ &+ \frac{e^2}{c}\left\{T^2 - e^2A_u^2 - m^2c^4\right\}^{-1/2}(\vec{A}_u \cdot \vec{A}_\perp) + \frac{e}{\omega}\int d\psi E_z(z,\psi)\end{aligned}$$

- Wir wissen schon, daß der FEL Prozess ein Prozeß 2. Ordnung ist. Deshalb entwicklen wir die Hamiltonfunktion noch bis zur zweiten Ordnung in $T - T_0$, da die Energie des Elektronenstrahls nicht stark von der Resonanzenergie T_0 abweichen darf, um eine Verstärkung zu erzielen.

Hamiltonfunktion

- Entwickelte Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}} &= H(P,\psi,z) \qquad (21)\\ &= C\cdot P + \frac{\omega}{2c\gamma_z^2 T_0}P^2 - (Ue^{i\psi} + U^* e^{-i\psi})(1-\frac{P}{T_0}) + \int d\psi e E_z\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}P &= T - T_0\\ C &= k_u - \frac{\omega}{2c\gamma_z^2}\\ U &= -\frac{ek_L\tilde{E}(z)}{2i\gamma}\\ \gamma_z^{-2} &= \gamma^{-2} + \frac{K^2}{\gamma^2} = \frac{1}{\gamma^2}(1+K^2)\end{aligned}$$

U ist das ponderomotive Potential

Bewegung eines Ensembles

- Annahme:
  Die Wechselwirkung eines Elektron mit dem kollektivem Feld, das von allen anderen Elektronen erzeugt wird (Strahlung und Raumladung), sei viel größer als die Wechselwirkung mit dem nächsten Nachbarn
- Entspricht einer *Mean field approximation*, wie sie z.B. aus der Atom- und Molekülphysik bekannt ist und zur Beschreibung von Mehrelektronensystemen angewandt wird.
- Sei $f(P, \psi, z)$ die Elektronenstrahlverteilungsfunktion
  Dann gilt für diese die Liouville'sche Gleichung

$$[H, f] + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dt} = 0$$

- Kommutator ist definiert als

$$[u, v]_{p,q} := \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial q_k} \right)$$

Liouville'sche Gleichung

- Lösung über die Störungstheorie
- Sei

$$
\begin{aligned}
f &= f_0 + \tilde{f}_1 e^{i\psi} + \tilde{f}_1^* e^{-i\psi} = f_0 + \tilde{f}_1 e^{i\psi} + C.C. \\
E_z &= \tilde{E}_z e^{i\psi} + C.C.
\end{aligned}
$$

mit

$f_0(P)$:	Ungestörte Funktion
$\tilde{f}_1(P, z)$:	kleine Störung $\lvert\tilde{f}_1\rvert \ll \lvert f_0\rvert$

Liouville'sche Gleichung

- Im P, ψ, z System lautet die Liouville'sche Gleichung somit

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial P}\frac{\partial f}{\partial \psi} - \frac{\partial H}{\partial \psi}\frac{\partial f}{\partial P} = 0 \qquad (22)$$

- Bedeutung:
  f ändert sich nicht entlang der Trajektorien außer durch die Wechselwirkung mit dem kollektivem Feld
- Lösung von (22) zusammen mit den Maxwell Gleichungen liefert die Lösung für das kollektive Feld und die Verteilungsfunktion f.

Störungstheorie

- Wir setzen jetzt Gleichung (21) (Hamiltonfunktion $H(P, \psi, z)$) in Gleichung (22) (Liouville'sche Gleichung) unter Verwendung der ebend definierten Funktion f ein. Das liefert nach einigen Umformungen

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial z} + i\left(C + \omega \frac{P}{c\gamma_z^2 T_0}\right)\tilde{f}_1 + (iU - e\tilde{E}_z)\frac{\partial f_0}{\partial P} = 0 \tag{23}$$

Hierbei sind Terme mit

$$U\frac{\tilde{f}_1}{T_0} \quad \text{und} \quad (iU - e\tilde{E}_z)\frac{d\tilde{f}_1}{dP}$$

relativ zu

$$(iU - e\tilde{E}_z)\frac{df_0}{dP}$$

zu vernachlässigen.

Anfangsbedingungen

- Zur Lösung der Gleichungen werden Anfangsbedingungen für den Elektronenstrahl benötigt. Diese werden so gewählt, daß der Strahl beim Eintritt in den Undulator ($z = 0$) weder in der Dichte noch in der Geschwindigkeit moduliert ist.

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}_1|_{z=0} &= 0 \\
f_0 &= n_0 \cdot F(P) \\
\int F(P) \cdot dP &= 1
\end{aligned}
$$

n_0 : Strahldichte
$F(P)$: normierte Dichteverteilungsfunktion

$\Rightarrow$ Lösung von Gleichung (23) mit diesen Anfangsbedingungen lautet dann

$$
\tilde{f}_1 = -n_0 \frac{dF}{dP} \int_0^z dz' (iU - e\tilde{E}_z) \exp\left\{ i \left[C + \frac{\omega P}{c\gamma_z^2 T_0} \right] (z' - z) \right\} \quad (24)
$$

Stromdichte

- Die Gleichung enthält wiederum das axiale Feld $\tilde{E}_z$, dass jetzt bestimmt werden soll.
- Die Stromdichte des Elektronenstrahls ist durch

$$
\begin{aligned}
j_z &= -ev_z \int f dP \\
&= j_0 + \tilde{j}_1 e^{i\psi} + C.C.
\end{aligned}
$$

  gegeben
- In der ultra-relativistischen Näherung $v_z \cong c$ gilt dann

$$
\begin{aligned}
\tilde{j}_1 &\cong -ec \int \tilde{f}_1 dP \\
j_0 &= -ecn_0
\end{aligned}
$$

Stromdichte

- Wir betrachten nun die Maxwellsche Gleichung

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{25}$$

Das Feld $\vec{E}$ und die Phasen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} E_z &= \tilde{E}_z e^{i\psi} + C.C. \quad \text{und} \quad \psi = k_u z + \omega(\frac{z}{c} - t) \\ \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \tilde{E}_z \frac{\partial}{\partial t} e^{i\psi} = -i\omega \tilde{E}_z e^{i\psi} \end{aligned}$$

- Am Ort des Elektronenstrahls ist rot$\vec{H} = 0$, so wird in der 1. dimensionalen Näherung Gleichung (25) zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial t} &= -i\omega \tilde{E}_z e^{i\psi} + C.C. = -4\pi \tilde{j}_1 e^{i\psi} + C.C. \\ \Rightarrow \tilde{E}_z &= -\frac{i4\pi \tilde{j}_1(z)}{\omega} \end{aligned} \tag{26}$$

Stromdichte

- Gleichung (26) können wir nun in Gleichung (24), welche die Modulation des Elektronenstrahl beschreibt, einsetzen. Da

$$\tilde{j}_1 \cong -ec \int \tilde{f}_1 dP$$

war wird zudem noch über P integriert. Damit folgt dann

$$\begin{aligned} \tilde{j}_1 &= i \cdot j_0 \int_0^z dz' \left\{ U + \frac{4\pi e \tilde{j}_1(z')}{\omega} \right\} \\ &\times \int dP \frac{dF(P)}{dP} \exp\left\{ i \left[C + \frac{\omega P}{c \gamma_z^2 T_0} \right] (z' - z) \right\} \end{aligned} \tag{27}$$

Dies ist eine Integro-Differentialgleichung, die den Elektronenstrom in dem 1. dimensionalen Modell beschreibt.

Vektorpotential

- Eine weitere Bedingung kann aus der Wellengleichung hergeleitet werden.
- Maxwell

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Die Eichung wurde so gewählt, dass $\phi = 0$ ist.

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}$$

- Damit ist die Wellengleichung gleich

$$\triangle\vec{A} - \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Wellengleichung

- Das Vektorpotential ist durch die obige Eichung noch nicht genau bestimmt und wir können noch wählen $\mathrm{div}\vec{A} = 0$

$$\Rightarrow -\triangle\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

- mit $\vec{j} = 0$ ist dies die bekannte Wellengleichung
- Im FEL ist jedoch $\vec{j} \neq 0$, da der Elektronenstrahl vorhanden ist
- Es soll das elektromagnetische Feld des FEL betrachtet werden $\Rightarrow$ nur $\vec{A}_\perp$ ist relevant

$$\frac{\partial^2\vec{A}_\perp}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}_\perp}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_\perp \tag{28}$$

Wellengleichung

- Die transversale Stromdichte $\vec{j}_\perp$ folgt aus der Geschwindigkeit $\vec{v}_\perp$. Für diese gilt

$$\begin{aligned} \frac{v}{c} &= \frac{K}{\gamma} e^{-ik_u z} \\ \Rightarrow j_x + ij_y &= \frac{K}{\gamma} e^{-ik_u z} \left[\tilde{j}_1 e^{i\psi} + C.C. \right] \end{aligned}$$

- Lösungsansatz

$$A_{x,y} = \tilde{A}_{x,y} \exp\left(i\omega(\frac{z}{c} - t) \right) + C.C.$$

Wellengleichung

- Berechnung der Terme

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \vec{A}_x}{\partial z^2} &= \exp\left(i\omega(\frac{z}{c}-t)\right)\left\{\frac{2i\omega}{c}\frac{\partial \tilde{A}_x(z)}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{A}_x(z)}{\partial z^2} - \tilde{A}_x(z)\frac{\omega^2}{c^2}\right\} \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}_x}{\partial t^2} &= -\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{A}_x(z)\exp\left(i\omega(\frac{z}{c}-t)\right) + C.C.\end{aligned}$$

- Mit $\exp(-ik_u z) = \cos k_u z - i \sin k_u z$ folgt

$$\vec{j}_\perp = \frac{K}{\gamma}\begin{pmatrix} \cos k_u z \\ -\sin k_u z \end{pmatrix}(\tilde{j}_1 e^{i\psi} + C.C.)$$

- Einsetzen von $\vec{A}_{x,y}$ und $\vec{j}_\perp$ in die Wellengleichung liefert dann

Wellengleichung

$$e^{\left(i\omega\left(\frac{z}{c}-t\right)\right)}\left\{\frac{2i\omega}{c}\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix}\tilde{A}_x\\ \tilde{A}_y\end{pmatrix}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\begin{pmatrix}\tilde{A}_x\\ \tilde{A}_y\end{pmatrix}+C.C.\right\}$$
$$=-\frac{4\pi K}{c\gamma}\begin{pmatrix}\cos k_u z\\ -\sin k_u z\end{pmatrix}(\tilde{j}_1 e^{i\psi}+C.C.)$$

- Diese Gleichung muß jetzt wieder vereinfacht werden. Dazu macht man die folgenden Annahmen
  1. $\tilde{j}_1(z)$ ist eine langsame veränderliche Funktion auf der Skala der Undulatorperiode
  2. Die Länge z ist viel größer als die Undulatorperiode λ_u

  Das bedeutet, dass man eine langen Undulator mit vielen Perioden betrachten muß und das sich von einer Periode zur nächsten der Elektronenstrahl nur wenig ändert.

Laser Feld

- Das bewirkt
  1. Die schnelle Oszillation $\cos k_u z$ und $\sin k_u z$ kann vernachlässigt werden
  2. die 2. Ableitung von $\tilde{A}_{x,y}$ wird vernachlässigt
- Damit wird die Gleichung zunächst zu

$$\exp\left(i\omega(\frac{z}{c} - t)\right)\left\{\frac{2i\omega}{c}\frac{\partial}{\partial z}\tilde{A}_{x,y} + C.C.\right\} = -\frac{4\pi K}{c\gamma}(\tilde{j}_1 e^{i\psi} + C.C.)$$

- Es ist

$$cE_{x,y} = -\frac{\partial A_{x,y}}{\partial t}$$

und mit dem gewähltem Ansatz für $A_{x,y}$

$$\frac{\partial A_{x,y}}{\partial t} = i\omega\tilde{A}_{x,y}\exp\left(i\omega(\frac{z}{c} - t)\right)$$

Laserfeld

- Damit kann dann die Wellengleichung letztendlich in der Form

$$\frac{d}{dz}\tilde{E}(z) = -\frac{2\pi K}{c\gamma}\tilde{j}_1(z) \tag{29}$$

geschrieben werden.

- Jetzt kann man noch $\tilde{j}_1(z)$, dass durch Gleichung (27) geben ist, einsetzen.

Laserfeld

- Damit ist dann das Laserfeld durch folgende Gleichung gegeben

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{E}}{dz} &= \frac{\pi e j_0 K^2}{c\gamma^2} \int_0^z dz' \left\{ \tilde{E}(z') + i\frac{4c\gamma^2}{\omega K^2}\frac{\tilde{E}(z')}{dz'} \right\} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dP \frac{dF(P)}{dP} \exp\left\{ i\left(C + \frac{\omega P}{c\gamma_z^2 T_0} \right)(z' - z) \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \tilde{j}_1 &= i j_0 \int_0^z dz' \left\{ U + \frac{4\pi e \tilde{j}_1(z')}{\omega} \right\} \\ &\times \int dP \frac{dF(P)}{dP} \exp\left\{ i\left[C + \frac{\omega P}{c\gamma_z^2 T_0} \right](z' - z) \right\} \end{aligned}$$

- Dies ist jetzt eine weitere Integro-Differentialgleichung, die die Entwicklung des Laserfeld entlang der Undulatorachse beschreibt.

Variablen Definition

Verstärkungsparameter $$\Gamma = \left(\frac{\pi j_0 K^2 \omega}{c\gamma_z^2\gamma^3 I_A}\right)^{1/3}$$

Alfven Strom $$I_a = \frac{mc^3}{e} = 17kA$$

$$\hat{z} = \Gamma \cdot z$$

Detuning Parameter $$\hat{C} = C/\Gamma = \frac{1}{\Gamma}(k_u - \frac{\omega}{2c\gamma_z^2})$$

Raumladungsparameter $$\hat{\Lambda}_p^2 = \Lambda_p^2/\Gamma^2$$

$$\Lambda_p^2 = \frac{4\pi j_0}{\gamma_z^2\gamma I_A}$$

Normierter Energieübertrag $$\hat{P} = \frac{T - T_0}{\rho T_0}$$

Effizienzparameter $$\rho = \frac{\gamma_z^2\Gamma c}{\omega}$$

Normiertes Laserfeld Gleichung

Die Gleichung für das Laserfeld hat damit die folgende Form

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{E}}{d\hat{z}} &= \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' \left\{ \tilde{E}(\hat{z}') + i\hat{\Lambda}_p^2 \frac{d\tilde{E}(\hat{z}')}{d\hat{z}'} \right\} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P} \frac{d\hat{F}}{d\hat{P}} \exp\left\{ i(\hat{P}+\hat{C})(\hat{z}'-\hat{z}) \right\} \end{aligned} \tag{31}$$

und

$$\int \hat{F}(\hat{P}) d\hat{P} = 1$$

Energieverteilung

- Beispiel Energieverteilungsfunktion $F(P)$
  Gaussverteilung

$$
\begin{aligned}
F(T - T_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi < (\Delta T)^2 >}} \exp\left(-\frac{(T - T_0)^2}{2 < (\Delta T)^2 >}\right) \\
\Rightarrow \hat{F}(\hat{P}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda_T^2}} \exp\left(\frac{\hat{P}}{2\Lambda_T^2}\right) \\
\Lambda_T^2 &= \frac{< (\Delta T)^2 >}{\rho^2 T_0^2}
\end{aligned}
$$

- Es wurden bisher verschiedenen Näherungen gemacht, um die Gleichung (31) herzuleiten. Wann ist die Gleichung aber überhaupt gültig ?

Gültigkeitsbereich

- Annahme war, daß $\tilde{E}(z)$ und $\tilde{j}(z)$ langsam veränderliche Funktionen sind. Das bedeutet

$$\Gamma \left| \frac{d\tilde{E}}{d\hat{z}} \right| \ll k_u |\tilde{E}| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{d\tilde{E}}{dz} \right| \ll k_u |\tilde{E}|$$

$$\Gamma \left| \frac{d\tilde{j}}{d\hat{z}} \right| \ll k_u |\tilde{j}_1| \qquad \text{da } \hat{z} = \Gamma \cdot z$$

- Für den Effizienzparameter ρ gilt dann

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\gamma_z^2 c}{\omega} \Gamma \\ &= \frac{\gamma_z^2}{k_L} \cong \frac{\Gamma}{k_u} = \frac{K}{k_u \gamma_z} \left(\frac{\pi j_0 \omega}{c \gamma^3 I_A} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho \left| \frac{d\tilde{E}}{d\hat{z}} \right| \ll |\tilde{E}|$$

Gültigkeitsbereich

- Insgesamt läßt sich zeigen, daß im Rahmen der durchgeführten Näherungen
$$\left(\rho, \rho\hat{\Lambda}_T, \rho\hat{\Lambda}_P, \rho\hat{C}\right) \ll 1$$
gelten muß.
- Damit erhält man dann die Bedingung
$$\rho = \frac{\gamma_z^2 c}{\omega}\Gamma \cong \frac{\pi j_0 K^2}{k_u^2 \gamma I_A} \ll 1$$

Lösung der Laserfeld Gleichung

- Die Gleichung (31)

$$\frac{d\tilde{E}}{d\hat{z}} = \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' \left\{ \tilde{E}(\hat{z}') + i\hat{\Lambda}_p^2 \frac{d\tilde{E}(\hat{z}')}{d\hat{z}'} \right\}$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P} \frac{d\hat{F}}{d\hat{P}} \exp\left\{ i(\hat{P}+\hat{C})(\hat{z}'-\hat{z}) \right\}$$

  soll nun gelöst werden.
- Definition der Laplace Transformation

$$\tilde{E}(p) = \int_0^{\infty} d\hat{z} \exp(-p\hat{z}) \tilde{E}(\hat{z})$$

- Multiplikation von Gleichung (31) mit $\exp(-p\hat{z})$ ($\mathrm{Re}\,p > 0$) und Integration über $\hat{z}$ von 0 bis ∞.

Lösung der Laserfeld Gleichung

- Linke Seite von Gleichung 31

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{d\tilde{E}(\hat{z})}{d\hat{z}} \exp(-p\hat{z}) d\hat{z} &= \tilde{E}(\hat{z}) \exp(-p\hat{z}) \Big|_0^\infty \\
&\quad - \int_0^\infty \tilde{E}(\hat{z})(-p) \exp(-p\hat{z}) d\hat{z} \\
&= -\tilde{E}(0) + p\tilde{E}(p) \\
&= p\tilde{E}(p) - E_{\mathrm{ext}}
\end{aligned}
$$

Lösung der Laserfeld Gleichung

- Rechte Seite der Gleichung

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty d\hat{z} \cdot e^{-p\hat{z}} \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' \left\{ \tilde{E}(\hat{z}') + i\hat{\Lambda}_p^2 \frac{d\tilde{E}(\hat{z}')}{d\hat{z}'} \right\} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P} \frac{d\hat{F}}{d\hat{P}} \exp\left\{ i(\hat{P} + \hat{C})(\hat{z}' - \hat{z}) \right\} \\
&= \left\{ \tilde{E}(p) + i\hat{\Lambda}_p^2 (p\tilde{E}(p) - \tilde{E}_{\mathrm{ext}}) \right\} \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P} \frac{\frac{d\hat{F}}{d\hat{P}}}{p + i(\hat{P} + \hat{C})}
\end{aligned}
$$

Lösung der Laserfeld Gleichung

- mit

$$
\begin{aligned}
& \int_0^\infty d\hat{z} \exp(-p\hat{z}) \left\{ \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' \tilde{E}(\hat{z}') \exp\left[i(\hat{P}+\hat{C})(\hat{z}'-\hat{z}) \right] \right\} \\
= & \int_0^\infty d\hat{z}' \tilde{E}(\hat{z}') \exp\left[i(\hat{P}+\hat{C})\hat{z}' \right] \cdot \int_{\hat{z}'}^\infty d\hat{z} \exp\left[-(p+i\hat{P}+i\hat{C})\hat{z} \right] \\
= & \frac{\tilde{E}(p)}{p+i(\hat{P}+\hat{C})}
\end{aligned}
$$

Lösung der Laserfeld Gleichung

- Mit der Definition

$$\hat{D} = \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P}' \frac{d\hat{F}}{d\hat{P}} \frac{1}{p + i(\hat{P} + \hat{C})} \tag{32}$$

wird Gleichung (31) dann zu

$$p\tilde{E}(p) - E_{\text{ext}} = \left\{ \tilde{E}(p) + i\hat{\Lambda}_p^2 \left(p\tilde{E}(p) - \tilde{E}_{\text{ext}} \right) \right\} \cdot \hat{D}$$

Lösung der Laserfeld Gleichung

- Umschreiben

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & p\tilde{E}(p) - \tilde{E}(p)\hat{D} - i\hat{\Lambda}_p^2 p\tilde{E}(p)\hat{D} = E_{\text{ext}} - i\hat{\Lambda}_p^2 E_{\text{ext}}\hat{D} \\
& = E_{\text{ext}}\left(1 - i\hat{\Lambda}_p^2\hat{D}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & \tilde{E}(p)\left(p - \hat{D} - i\hat{\Lambda}_p^2\hat{D}p\right) = E_{\text{ext}}\left(1 - i\hat{\Lambda}_p^2\hat{D}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & \tilde{E}(p) = E_{\text{ext}}\frac{1 - i\hat{\Lambda}_p^2\hat{D}}{p - \hat{D} - ip\hat{\Lambda}_p^2\hat{D}} \\
\Rightarrow \quad & \tilde{E}(p) = E_{\text{ext}}\left[p - \frac{\hat{D}}{1 - i\hat{\Lambda}_p^2\hat{D}}\right]
\end{aligned}
$$

Lösung der Laserfeld Gleichung

- Benötigt wird jetzt die Feldamplitude $\tilde{E}(\hat{z})$, die mit der inversen Laplace Transformation berechnet werden kann

$$\begin{aligned}\tilde{E}(\hat{z}) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha'-i\infty}^{\alpha'+i\infty} d\lambda \tilde{E}(\lambda)\exp(\lambda\hat{z}) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha'-i\infty}^{\alpha'+i\infty} d\lambda \exp(\lambda\hat{z})\left[\lambda - \frac{\hat{D}(\lambda)}{1 - i\hat{\Lambda}_p^2\hat{D}(\lambda)}\right] \end{aligned} \tag{33}$$

  $\alpha' > 0$ reell und größer als alle Polstellen des Integranten. Die Integration erfolgt parallel zur imaginaeren Achse.
- Wir wollen zunächst den einfach Fall eines kalten Elektronenstrahls betrachten. Das heißt, das es eine scharfe Verteilung der Elektronenenergie gibt und somit die Verteilungsfunktion die folgende Form hat

$$\hat{F}(\hat{P}) = \delta(\hat{P})$$

FEL – Kalter Elektronenstrahl

- Für die Funktion (32) läßt sich dann schreiben

$$
\begin{aligned}
\hat{D}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P} \frac{\hat{F}'(\hat{P})}{\lambda + i(\hat{P} + \hat{C})} \\
&= \underbrace{\left. \frac{\hat{F}(\hat{P})}{\lambda + i(\hat{P} + \hat{C})} \right|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P} \frac{\hat{F}(p) \frac{d}{d\hat{P}}(\lambda + i(\hat{P} + \hat{C}))}{[\lambda + i(\hat{P} + \hat{C})]^2} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P} \frac{i\delta(\hat{P})}{[\lambda + i(\hat{P} + \hat{C})]^2} \\
&= i(\lambda + i\hat{C})^{-2}
\end{aligned}
$$

Lösung der Laserfeld Gleichung

- Damit ist das Feld aus Gleichung (31) durch

$$\tilde{E}(\hat{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha'-i\infty}^{\alpha'+i\infty} d\lambda \exp(\lambda\hat{z}) \left[\lambda - \frac{i}{(\lambda + i\hat{C})^2 + \hat{\Lambda}_p^2} \right]^{-1} \tag{34}$$

  gegeben
- Wie läßt sich diese Gleichung jetzt lösen ?

FEL – Kalter Elektronenstrahl

- Wenn der Faktor vor der $\exp(\lambda\hat{z})$-Funktion das Jordan'sche Lemma erfüllt kann das Integral mittels des Cauchy'sches Residum Theorem als eine Summe über Partialwellen geschrieben werden.

$$\left[\lambda - \frac{\hat{D}}{1 - i\hat{\Lambda}_p^2\hat{D}}\right]^{-1} = \left[\lambda - \frac{i}{(\lambda + i\hat{C}^2) + \hat{\Lambda}_p^2}\right]^{-1} \tag{35}$$

- Das Jordan Lemma sagt aus, daß das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}dx$$

0 ist, wenn für die Funktion $f(x)$ gilt

$$\lim_{R\to\infty} |f(R \cdot e^{i\theta})| = 0.$$

- Der Faktor (35) ist von der Ordnung $O(\lambda^{-1})$, so daß für $|\lambda| \to \infty$ das Jordan Lemma erfüllt ist.

FEL – Kalter Elektronen Strahl

- Damit kann das Integral (34) in eine Reihe

$$\tilde{E}(\hat{z}) = E_{\text{ext}} \sum_j \exp(\lambda_j \hat{z}) \left[\lambda - \frac{\hat{D}'_j}{1 - i\hat{\Lambda}_p^2 \hat{D}_j} \right]^{-1} \qquad (36)$$

umgeschrieben werden, wobei

$$\hat{D}_j = \hat{D}|_{\lambda=\lambda_j} \text{ und } \hat{D}'_j = \left. \frac{d\hat{D}}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_j}$$

sind und λ_j die Lösungen von

$$\lambda - \frac{\hat{D}'_j}{1 - i\hat{\Lambda}_p^2 \hat{D}_j} = 0$$

sind.

FEL – Kalter Elektronenstrahl

- Für den kalten Elektronenstrahl gilt somit

$$\tilde{E}(\hat{z}) = E_{\text{ext}} \sum_j \frac{\exp(\lambda_j \hat{z})}{1 - 2i(\lambda_j + i\hat{C})\lambda_j^2} \quad (37)$$

$$\lambda = i\left[(\lambda + i\hat{C})^2 + \hat{\Lambda}_p^2\right]^{-1} \quad (38)$$

- Die λ_j sind somit die Lösung einer kubischen Gleichung. Für die Lösungen dieser kubischen Gleichung gilt

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = i$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 = -\hat{C}^2 + \hat{\Lambda}_p^2$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -2i\hat{C}$$

FEL – Kalter Elektronenstrahl

- Einsetzen dieser Bedingungen in Gleichung (37) und Umformen liefert dann

$$\frac{\tilde{E}(\hat{z})}{E_{\text{ext}}} = \frac{\lambda_2\lambda_3 \exp(\lambda_1\hat{z})}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} + \frac{\lambda_1\lambda_3 \exp(\lambda_2\hat{z})}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)} + \frac{\lambda_1\lambda_2 \exp(\lambda_3\hat{z})}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)} \tag{39}$$

- Es soll nun der Fall eines sehr kleinen Raumladungsfeld $\hat{\Lambda}_p^2 \to 0$ direkt in der Resonanzposition $\hat{C} = 0$ betrachtet werden. Dann wird Gleichung (38) zu

$$\lambda = i\lambda^{-2} \Leftrightarrow \lambda^3 = i$$

FEL – Kalter Elektronenstrahl

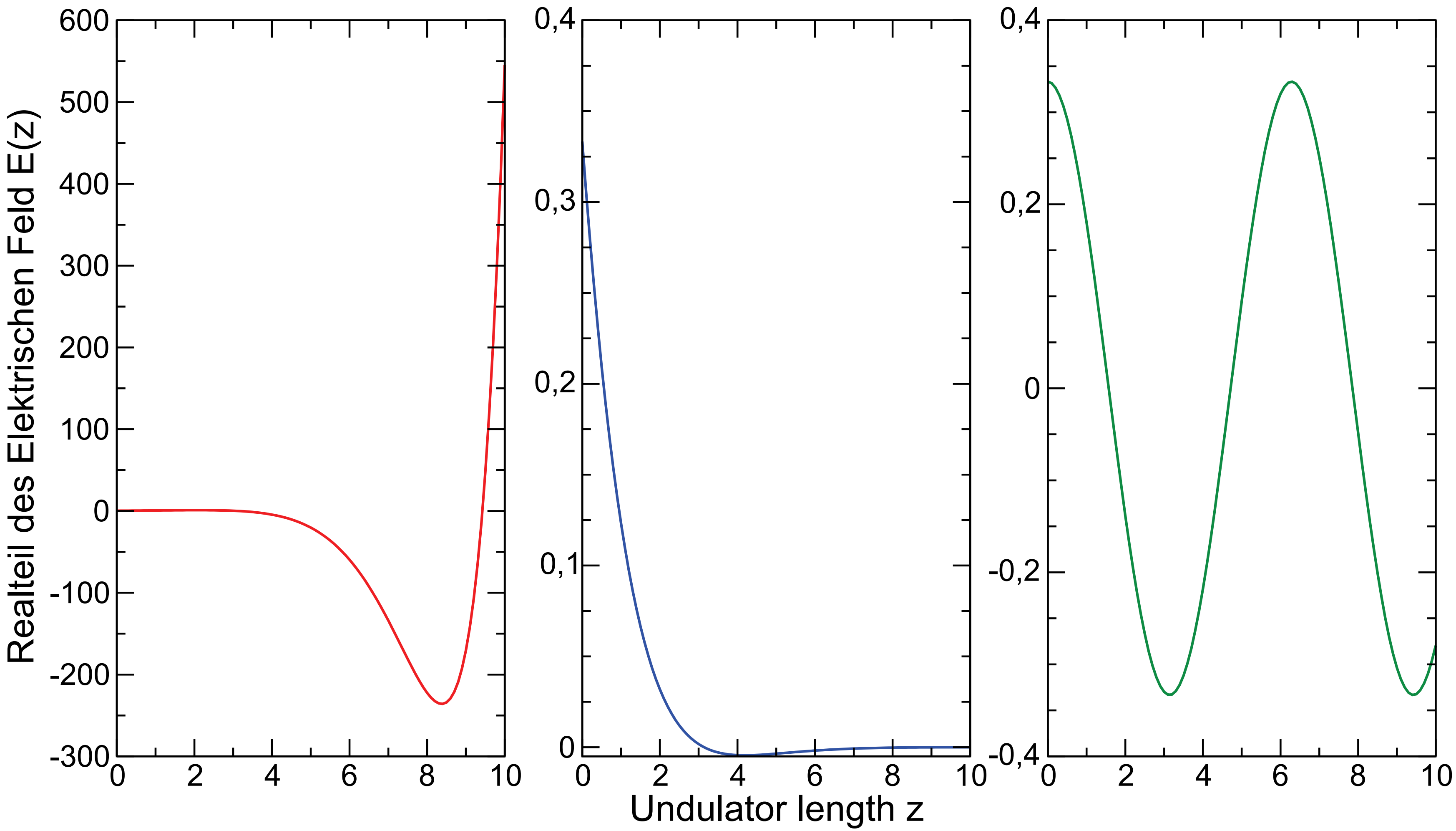
- Lösungen sind

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= -i \\
\lambda_2 &= \frac{\sqrt{3}+i}{2} \\
\lambda_3 &= \frac{-\sqrt{3}+i}{2}
\end{aligned}
$$

- Für das Feld erhält man damit die folgende Lösung

$$
\frac{\tilde{E}(\hat{z})}{E_{\mathrm{ext}}} = \frac{1}{3}\left[\exp\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\hat{z}\right) + \exp\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\hat{z}\right) + \exp(-i\hat{z})\right]
$$

FEL – Feld im linearen Bereich

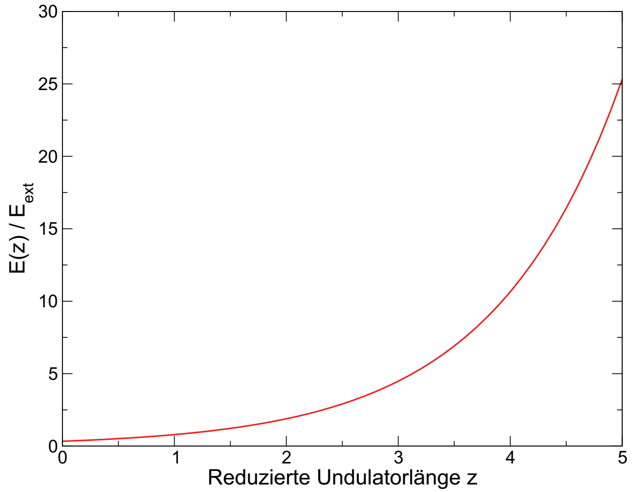


FEL – Feld im linearen Bereich

- Der 3. Term oszilliert und der 2. Term nimmt exponentiell ab Für den asympotischen Fall $\hat{z} > 1$ wird die Gleichung somit zu

$$\frac{\tilde{E}(\hat{z})}{E_{\text{ext}}} = \frac{1}{3}\exp\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\hat{z}\right)$$

- Mit zunehmender reduzierter Undulatorlänge $\hat{z}$ nimmt das elektrische Feld $\tilde{E}(\hat{z})$ also exponentiell zu! Verstärkung!



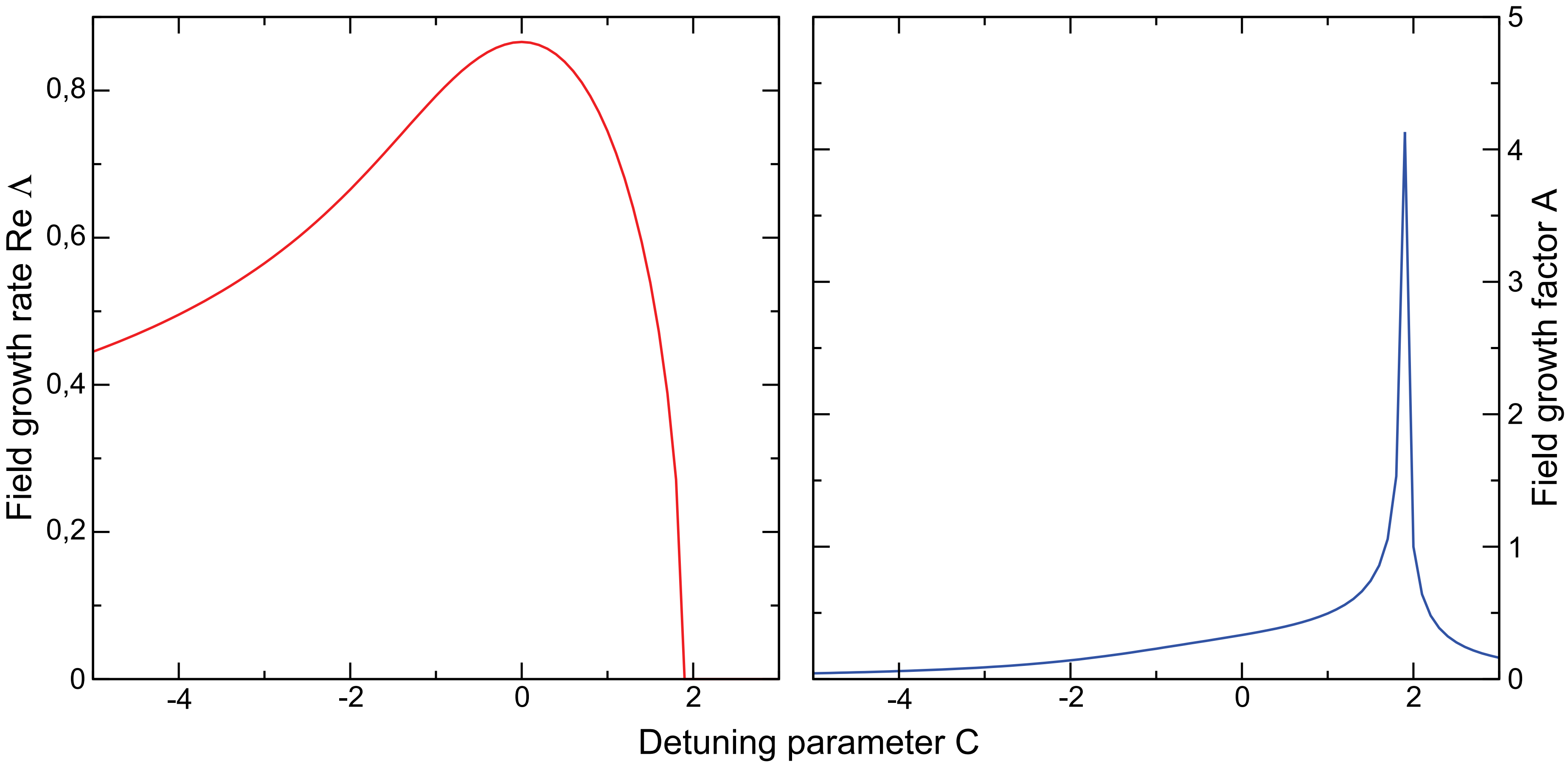
$$\begin{aligned} G &= \frac{|\tilde{E}|^2}{E_{\text{ext}}^2} \\ &= \frac{1}{9}\left[1 - 4\cosh\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{z}\left(\cosh\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{z} + \cos\frac{3}{2}\hat{z}\right)\right] \end{aligned}$$

FEL – Verstärkungsverhalten

- Im Gegensatz zum low Gain Bereich verstärkt der FEL im linearen Bereich direkt bei der Resonanzenergie $\hat{C} = 0$
- Im folgenden soll nun das Verstärkungsverhalten des FEL diskutiert werden.
  Dazu nehmen wir wieder zunächst ein verschwindenes Raumladungsfeld an $\hat{\Lambda}_p^2 \to 0$. Damit wird Geichung (35) zu
  $$\lambda(\lambda + i\hat{C})^2 = i$$
- Die Propagationskonstanten λ_j hängen somit nur vom Detuning Parameter $\hat{C}$ ab. Lösung läßt sich im Prinzip explizit aufschreiben, wir wollen aber nur das Verhalten betrachten.
- $\hat{\Lambda}$ sei die Lösung λ_j, die dem exponentiellen Wachstum der Leistung entspricht
- Damit kann die Verstärkung dann einfach in der Form
  $$G = A \cdot \exp(2Re\hat{\Lambda}\hat{z})$$

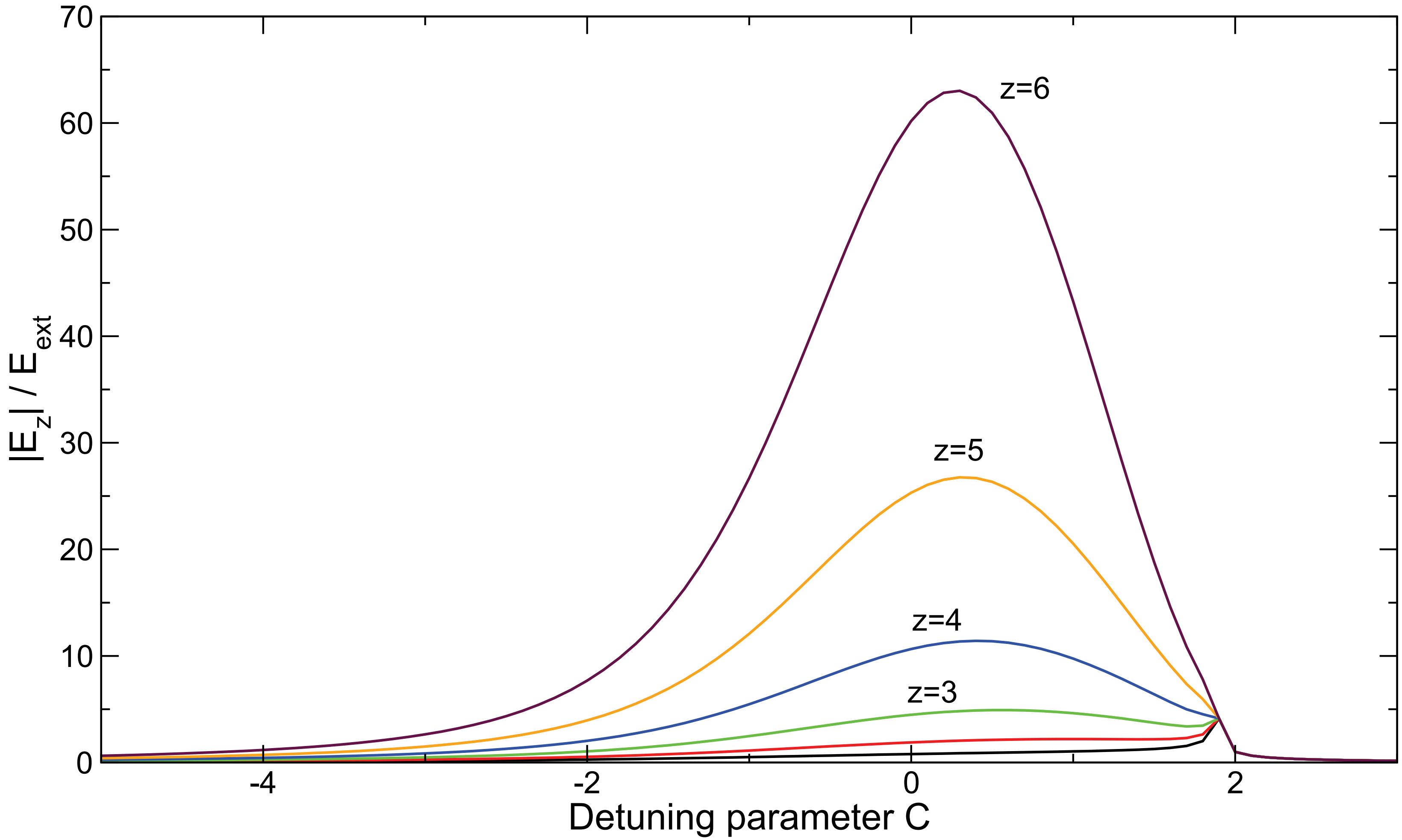
FEL – Verstärkungsverhalten

- $\hat{\Lambda}$: Field growth rate
  A : Input coupling factor



FEL – Verstärkungsverhalten

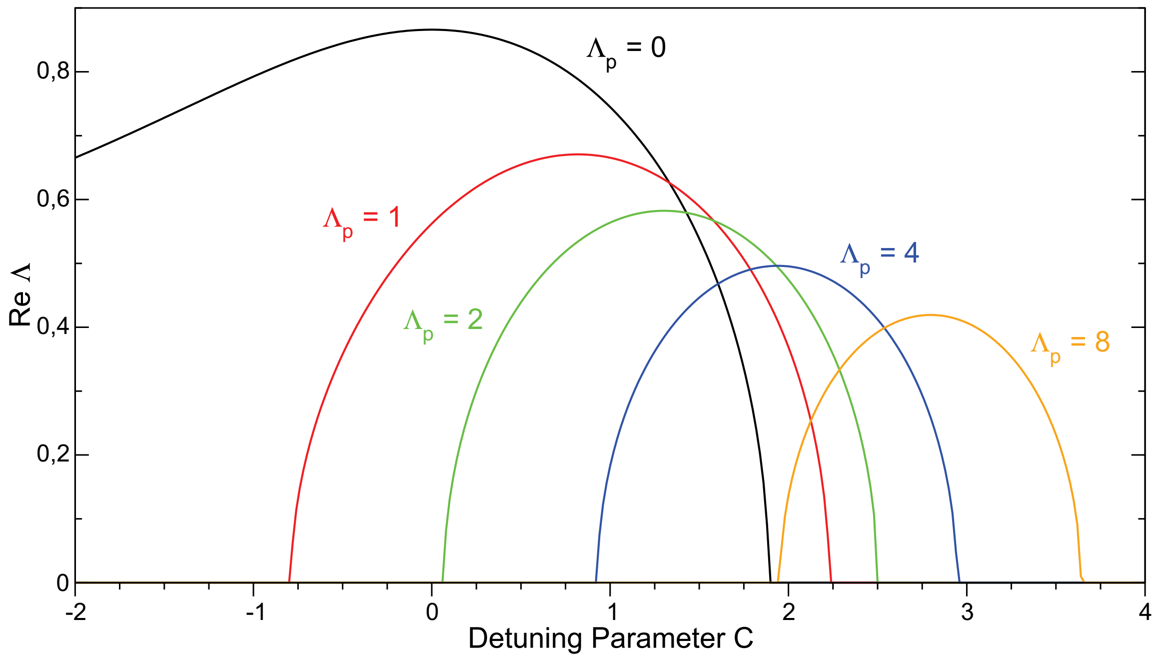
- Verstärkung des Feldes $\tilde{E}(\hat{z})$ bei verschiedenen Längen $\hat{z}$ des Undulators



FEL – Verstärkungsverhalten

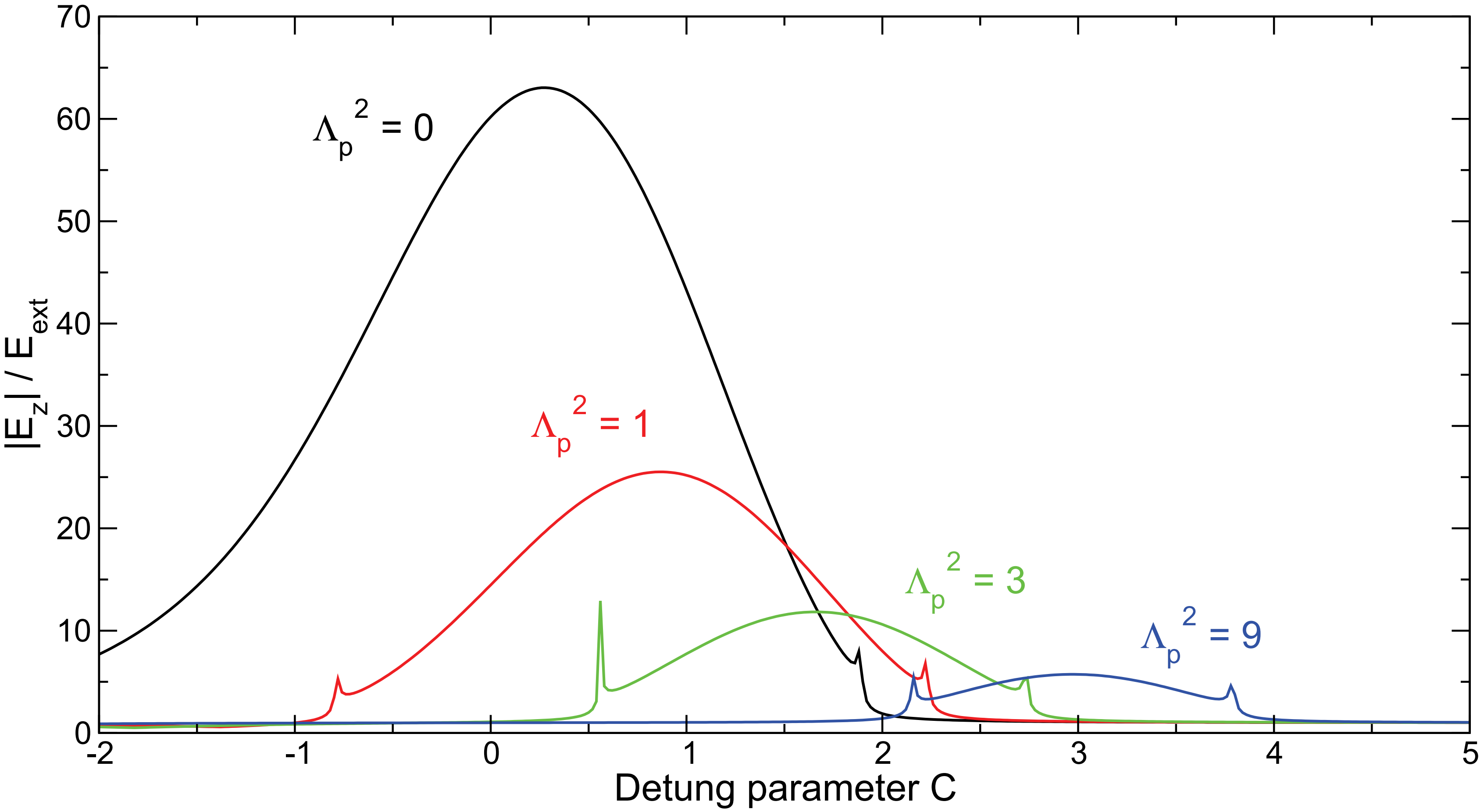
- Welchen Einfluß hat nun eine Raumladung $\hat{\Lambda}_p^2 > 0$ auf das Verstärkungsverhalten ?
- Dazu muß Gleichung (39) mit den korrekten Werten für die Eigenwerte der Gleichung (38) berechnet werden.

$$\lambda = i\left[(\lambda + i\hat{C})^2 + \hat{\Lambda}_p^2\right]^{-1}$$



FEL – Verstärkungsverhalten

- Für große Raumladungsfelder $\hat{\Lambda}_p^2$ wird somit die Verstärkung stark unterdrückt



FEL – Verstärkungsverhalten

- Das Maximum der Field growth rate $Re\hat{\Lambda}$ läßt sich durch

$$\max(Re\hat{\Lambda}) \cong \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{\hat{\Lambda}_p^2}{3}\right)$$

beschreiben. Das Maximum selbst wird bei einem Detuning Parameter

$$\hat{C}_m \cong \hat{\Lambda}_p$$

erreicht.

FEL – Verstärkungsverhalten

- Es soll jetzt als letzter Schritt der Einfluß einer Energieverteilung des Elektronenstrahls diskutiert werden. Bis jetzt wurde ein kalter Elektronenstrahl angenommen.
- Realistische Verteilung ist eine Gaussverteilung der Energie

$$\hat{F}(\hat{P}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\Lambda}_T^2}} \exp\left(-\frac{\hat{P}^2}{2\hat{\Lambda}_T^2}\right)$$

  mit der Breite $\hat{\Lambda}_T^2$ der Verteilung.
- Das Feld ist durch Gleichung (33)

$$\tilde{E}(\hat{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha'-i\infty}^{\alpha'+i\infty} d\lambda \exp(\lambda\hat{z}) \left[\lambda - \frac{\hat{D}(\lambda)}{1 - i\hat{\Lambda}_p^2 \hat{D}(\lambda)}\right]$$

  gegeben

FEL – Verstärkungsverhalten

- mit $\hat{D}$

$$\hat{D}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P} \frac{\hat{F}'(\hat{P})}{\lambda + i(\hat{P} + \hat{C})}.$$

- Die Rechnung soll jetzt hier nicht ausgeführt werden, sie ist z.B. in dem Buch von Saldin durchgeführt.

Das Ergebnis für das Feld im Fall einer Gaussverteilung der Elektronenenergie lautet

$$\frac{\tilde{E}(\hat{z})}{E_{\text{ext}}} = \exp(\hat{\Lambda}\hat{z}) \times \left\{1 + i(i - \hat{\Lambda}_p^2\hat{\Lambda})^2 \left[\left(\frac{\hat{\Lambda}}{i - \hat{\Lambda}_p^2\hat{\Lambda}} - \frac{1}{\hat{\Lambda}_T^2}\right) \times \left(\frac{1}{\hat{\Lambda} + i\hat{C}} - \frac{\hat{\Lambda} + i\hat{C}}{\hat{\Lambda}_T^2}\right) + \frac{\hat{\Lambda} + i\hat{C}}{\hat{\Lambda}_T^4}\right]\right\}^{-1} \quad (40)$$

FEL – Verstärkungsverhalten

- wobei $\hat{\Lambda}$ die Eigenwerte der Gleichung

$$\hat{D}(\hat{\Lambda}) = \frac{\hat{\Lambda}}{1 + i\hat{\Lambda}_p^2\hat{\Lambda}}$$

sind mit

$$\hat{D} = \frac{i}{\hat{\Lambda}_T^2} - \frac{i\sqrt{\pi/2}}{\hat{\Lambda}_T^3}(\lambda + i\hat{C}) \exp\left[\frac{(\lambda + i\hat{C})^2}{2\hat{\Lambda}_T^2}\right] \times \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{(\lambda + i\hat{C})}{2\hat{\Lambda}_T^2}\right)\right]$$

und der Fehlerfunktion

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x du \exp(-u^2)$$

FEL – Verstärkungsverhalten

- Wir wollen hier jetzt nur wieder den Fall eines verschwindenen Raumladungsfeld $\hat{\Lambda}_p^2 \rightarrow 0$ kurz diskutieren
- Für diesen Fall wird Gleichung (40) zu

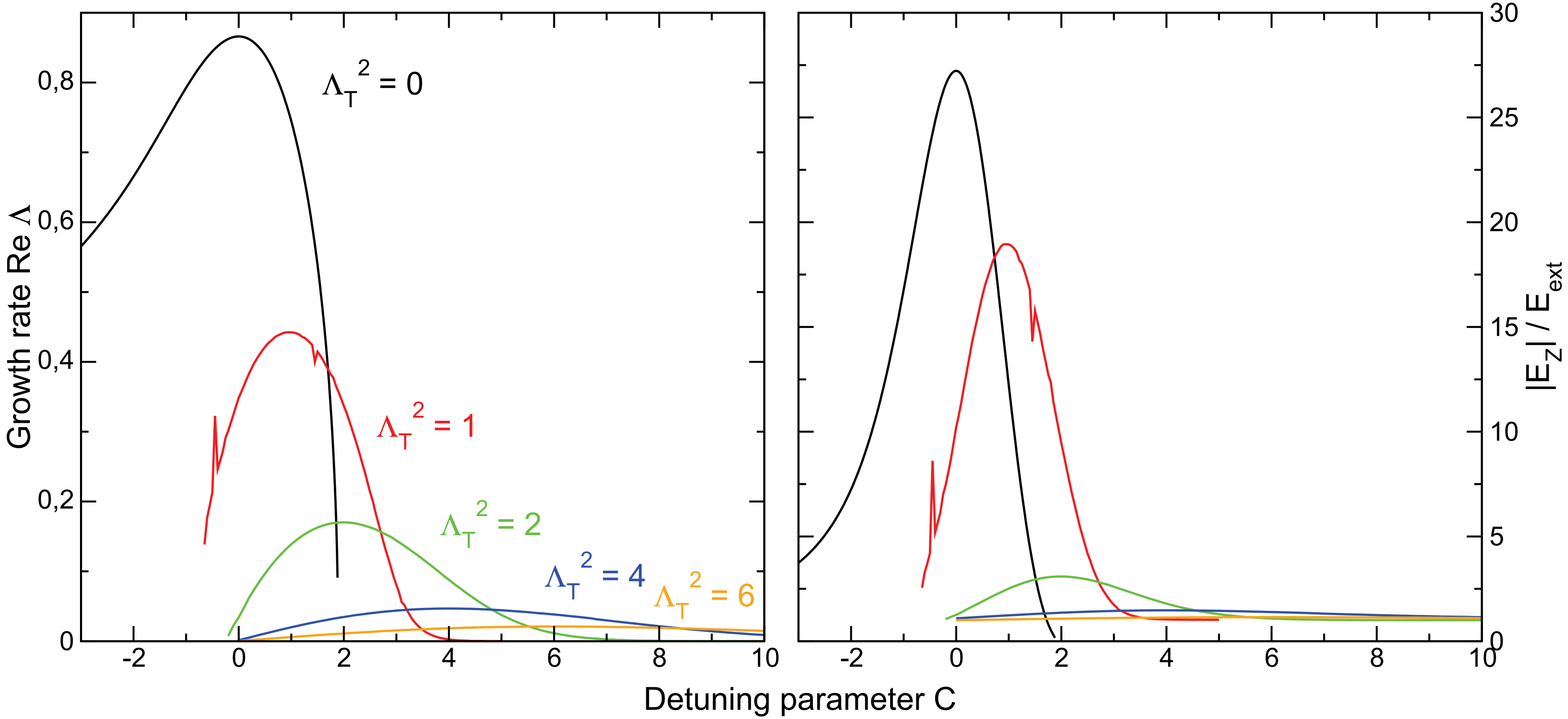
$$\frac{\tilde{E}(\hat{z})}{E_{\text{ext}}} = \frac{\hat{\Lambda}_T^2(\hat{\Lambda} + i\hat{C})}{i(\hat{C}\hat{\Lambda}_T^2 + 1) - \hat{\Lambda}(\hat{\Lambda} + i\hat{C})^2} \exp(\hat{\Lambda}\hat{z})$$

und $\hat{\Lambda}$ ist die Lösung der Eigenwertgleichung

$$\hat{\Lambda} = i \int_0^\infty dx \cdot x \cdot \exp\left(-\hat{\Lambda}_T^2 x^2/2 - (\hat{\Lambda} + i\hat{C})x\right)$$

FEL – Verstärkungsverhalten

- Growth rate und Feld des FEL bei verschiedenen Energieverteilungen des Elektronenstrahls



Take Home Message – FEL Linearer Bereich

- Herleitung des Laserfeldes und der Elektronenverteilung in einem 1-dimensionalen Modell.
- Gekoppelte Integrodifferentialgleichungen für die Elektronendichte und das Laserfeld.
- Lösung der Gleichungen zeigt ein exponentielles Wachstum des Laserfeldes.
- Verstärkung in einem schmalen Bereich um die Resonanzfrequenz.
- Ausgangsleistung hängt linear von der eingekoppelten Leistung E_0 ab.