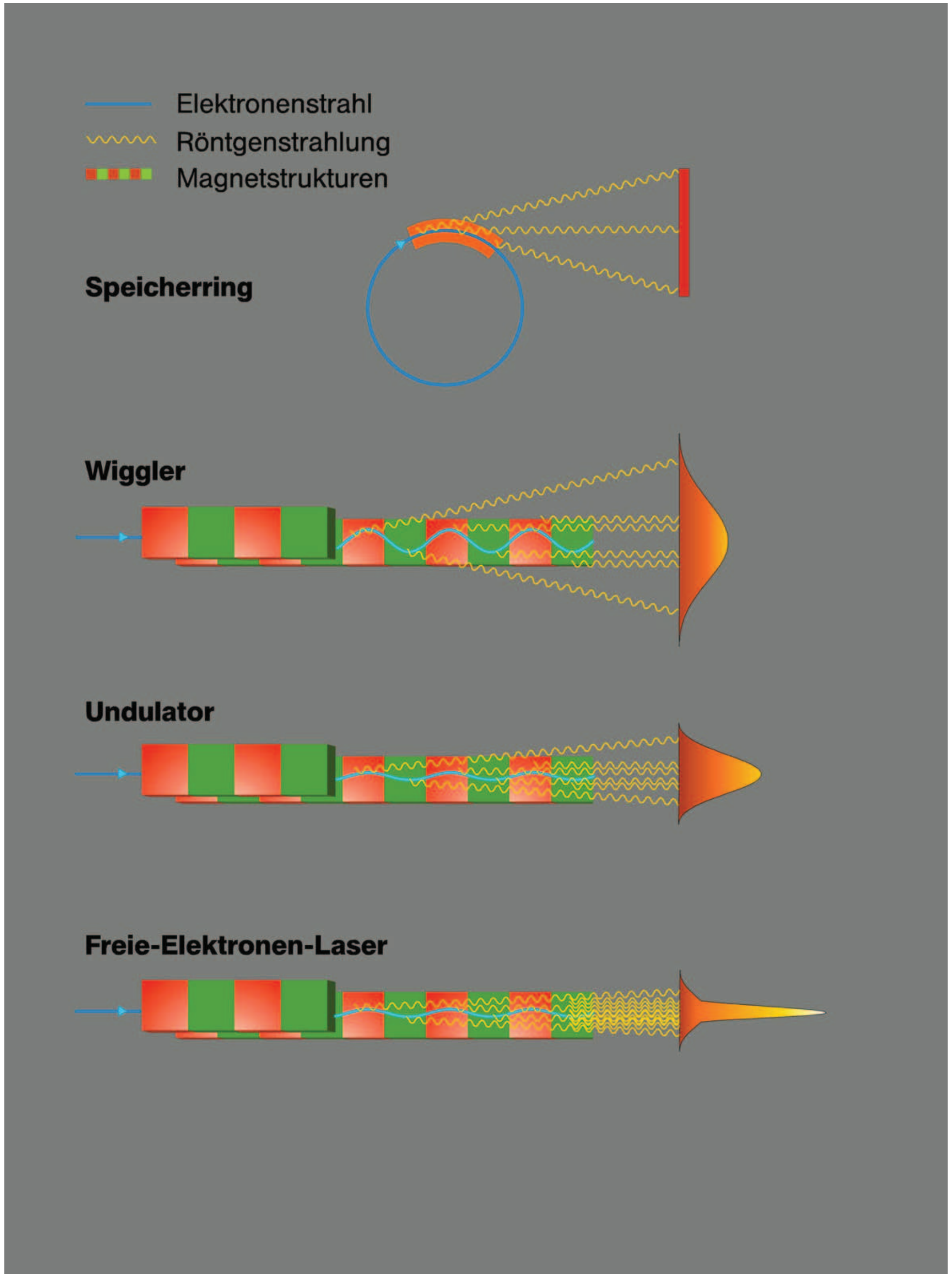
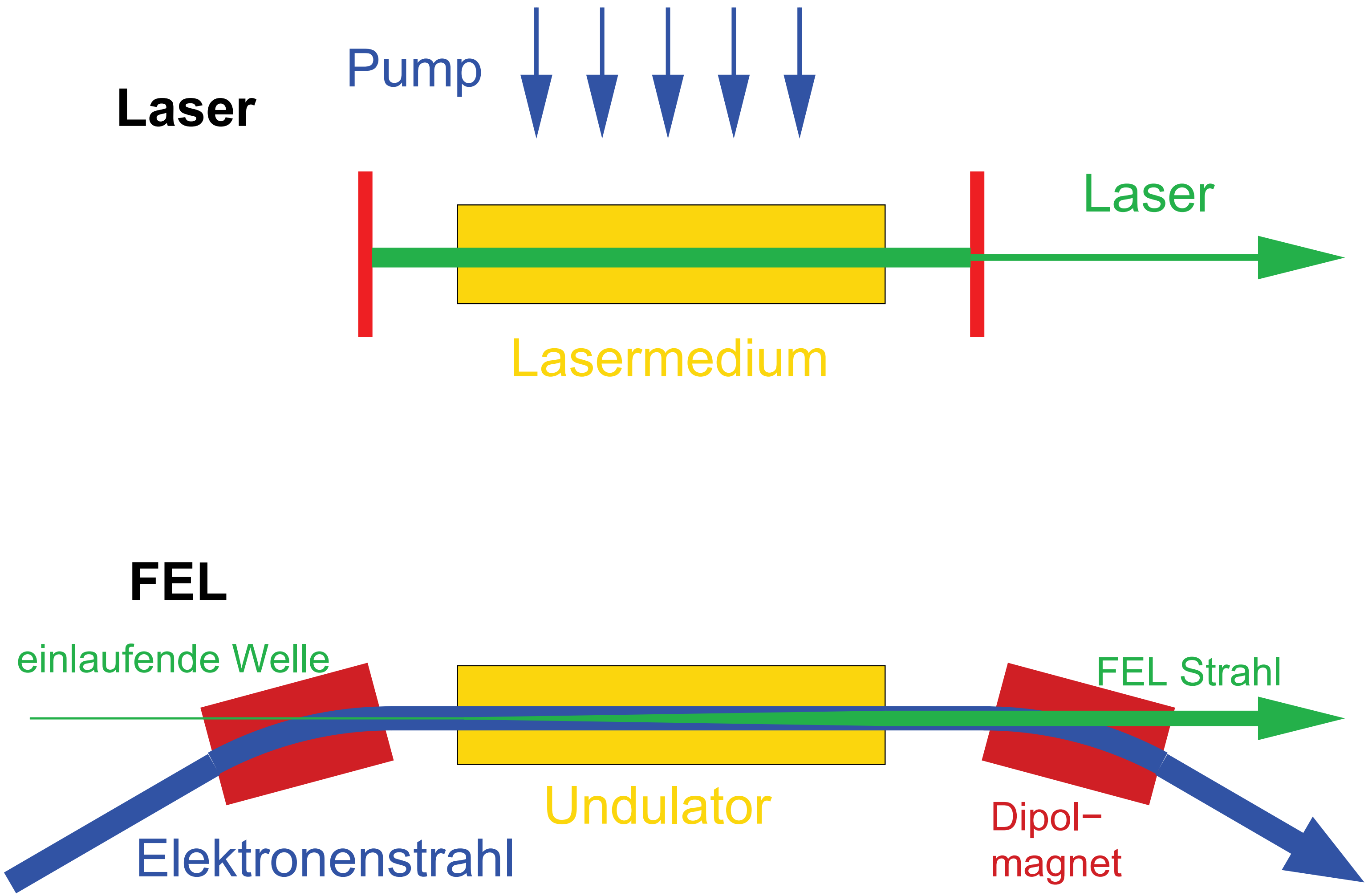


Freie Elektronen Laser

- Energieübertrag
- Verstärkungsbereiche
- Der SASE Prozeß

Laser - FEL


Laser
Pump
Laser
Lasermedium
FEL
einlaufende Welle
FEL Strahl
Undulator
Elektronenstrahl
Dipol–
magnet

FEL Energieübertrag

- Aus dem Elektronenstrahl muß Energie in das Laserfeld $\vec{E}_{FEL}$ entlang des Weges s übertragen werden.

$$\Delta W = -e \int \vec{E}_{FEL} \cdot d\vec{s} = -e \int \vec{v} \cdot \vec{E}_{FEL} dt$$

- Licht ist transversal polarisiert, so dass

$$\vec{v} \perp \vec{E}_{FEL} \Rightarrow \Delta W = 0$$

- In einem Undulator gibt es eine senkrechte Komponente

$$v_x = \beta c \frac{K}{\gamma} \sin(\omega_u t),$$

  die an das FEL Feld ankoppeln kann
- Ein Undulator ist eine Voraussetzung für den Betrieb eines FEL

FEL Energieübertrag

- Wechselwirkung zwischen Elektronen und $\vec{B}$ sowie $\vec{E}_{FEL}$ wird durch die Lorentzkraft beschrieben

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e(\vec{E}_{FEL} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Umschreiben liefert

$$\frac{d(\gamma\vec{\beta})}{dt} = -\frac{e}{mc}(\vec{E}_{FEL} + c\vec{\beta} \times \vec{B})$$

- Gesamtenergie

$$W = \gamma mc^2 \Rightarrow \frac{dW}{dt} = mc^2\frac{d\gamma}{dt}$$

Mit

$$\Delta W = -e\int \vec{E}_{FEL} \cdot d\vec{s} = -e\int \vec{v} \cdot \vec{E}_{FEL} dt$$

FEL Energieübertrag

- Wechselwirkung zwischen Elektronen und $\vec{B}$ sowie $\vec{E}_{FEL}$ wird durch die Lorentzkraft beschrieben

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e(\vec{E}_{FEL} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Umschreiben liefert

$$\frac{d(\gamma\vec{\beta})}{dt} = -\frac{e}{mc}(\vec{E}_{FEL} + c\vec{\beta} \times \vec{B})$$

- Gesamtenergie

$$W = \gamma mc^2 \Rightarrow \frac{dW}{dt} = mc^2\frac{d\gamma}{dt}$$

Mit

$$\Delta W = -e\int \vec{E}_{FEL} \cdot d\vec{s} = -e\int \vec{v} \cdot \vec{E}_{FEL} dt$$

FEL Energieübertrag

erhält man

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{e}{mc}\vec{\beta} \cdot \vec{E}_{FEL} \qquad (7)$$

$$\frac{d(\gamma\vec{\beta})}{dt} = -\frac{e}{mc}(\vec{E}_{FEL} + c\vec{\beta} \times \vec{B}) \qquad (8)$$

- Näherungen
  - Bedingung gilt am Anfang bei schwacher Verstärkung

$$|\vec{E}_{FEL}| \ll c|\vec{\beta} \times \vec{B}|$$

  - β variiert viel stärker als γ

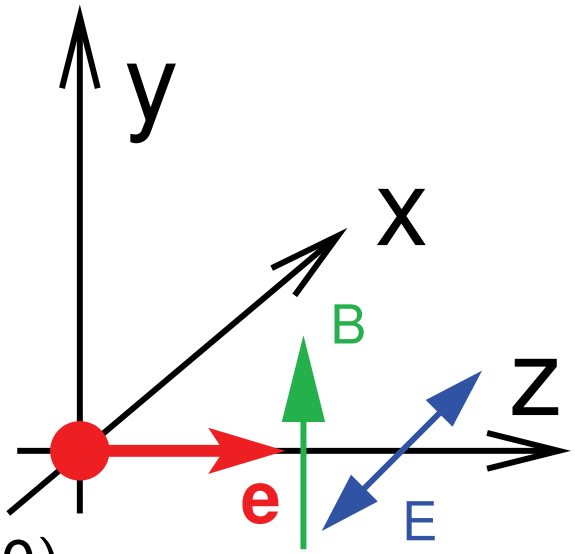
$$\frac{d(\gamma\vec{\beta})}{dt} \approx \gamma\frac{d(\vec{\beta})}{dt}$$

FEL Energieübertrag

Damit wird Gleichung (8) zu

$$\Rightarrow \gamma \frac{d(\vec{\beta})}{dt} = -\frac{e}{mc} c\vec{\beta} \times \vec{B}$$

$$\boxed{\Rightarrow \gamma \frac{d(\vec{\beta})}{dt} = -\frac{e}{mc} c\vec{\beta} \times \vec{B} \qquad (9)}$$



- Es sein gegeben

  Undulatorfeld $\vec{B} = (0, B_0 \sin k_u z, 0)$

  Laserfeld $\vec{E}_{FEL} = (E_0 \cos(kz - \omega t), 0, 0)$

- Einsetzen von $\vec{B}$ in Gleichung 9 liefert dann

$$\frac{d\beta_x}{dt} = \frac{eB_0}{mc\gamma} c \sin k_u z$$

FEL Energieübertrag

- Integration ($k_u = 2\pi/\lambda_u$)

$$\beta_x = -\frac{e\lambda_u B_0}{2\pi\gamma mc} \cos k_u z = -\frac{K}{\gamma} \cos k_u z$$

  K ist der früher definierte Undulatorparameter

- Energiegewinn des Laser Feldes war

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{e}{mc}\vec{\beta} \cdot \vec{E}_{FEL}$$

- Geschwindigkeit

$$\beta_x = -\frac{e\lambda_u B_0}{2\pi\gamma mc} \cos k_u z = -\frac{K}{\gamma} \cos k_u z$$

- Einsetzen von β_x

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{eE_0 K}{\gamma mc} \cos(k_u z) \cos(kz - \omega t)$$

FEL Gleichung

mit $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$ folgt

Diskussion der FEL Gleichung

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{eE_0K}{2\gamma mc}(\cos[(k+k_u)z - \omega t] + \cos[(k-k_u)z - \omega t]) \quad (10)$$

Der Energieübertrag hängt von der Feldstärke E_0 des FEL-Feldes ab – Entspricht der induzierten Emission des “normalen” Lasers

- Maximaler Energietransfer: Phase der Oszillation ist konstant

$$\frac{d\Psi_\pm}{dt} = \frac{d}{dt}((k \pm k_u)z - \omega t) = (k \pm k_u)\frac{dz}{dt} - \omega \approx 0$$

FEL Gleichung

Die FEL Gleichung kann in der folgenden Form geschrieben werden

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{K \cdot K_{FEL} \cdot k_u}{2\gamma c} (\cos[(k + k_u)z - \omega t] + \cos[(k - k_u)z - \omega t])$$

mit

$$K_{FEL} = \frac{eE\lambda_u}{2\pi mc^2} \quad \text{analog zum Undulator Parameter} \quad K = \frac{eB\lambda_u}{2\pi mc}$$

FEL Energieübertrag

- $\frac{dz}{dt}$ ist die mittlere Geschwindigkeit des Elektrons entlang der z-Achse
  Mit $\omega = kc$ und $\dot{z} = \beta^* c$ folgt dann

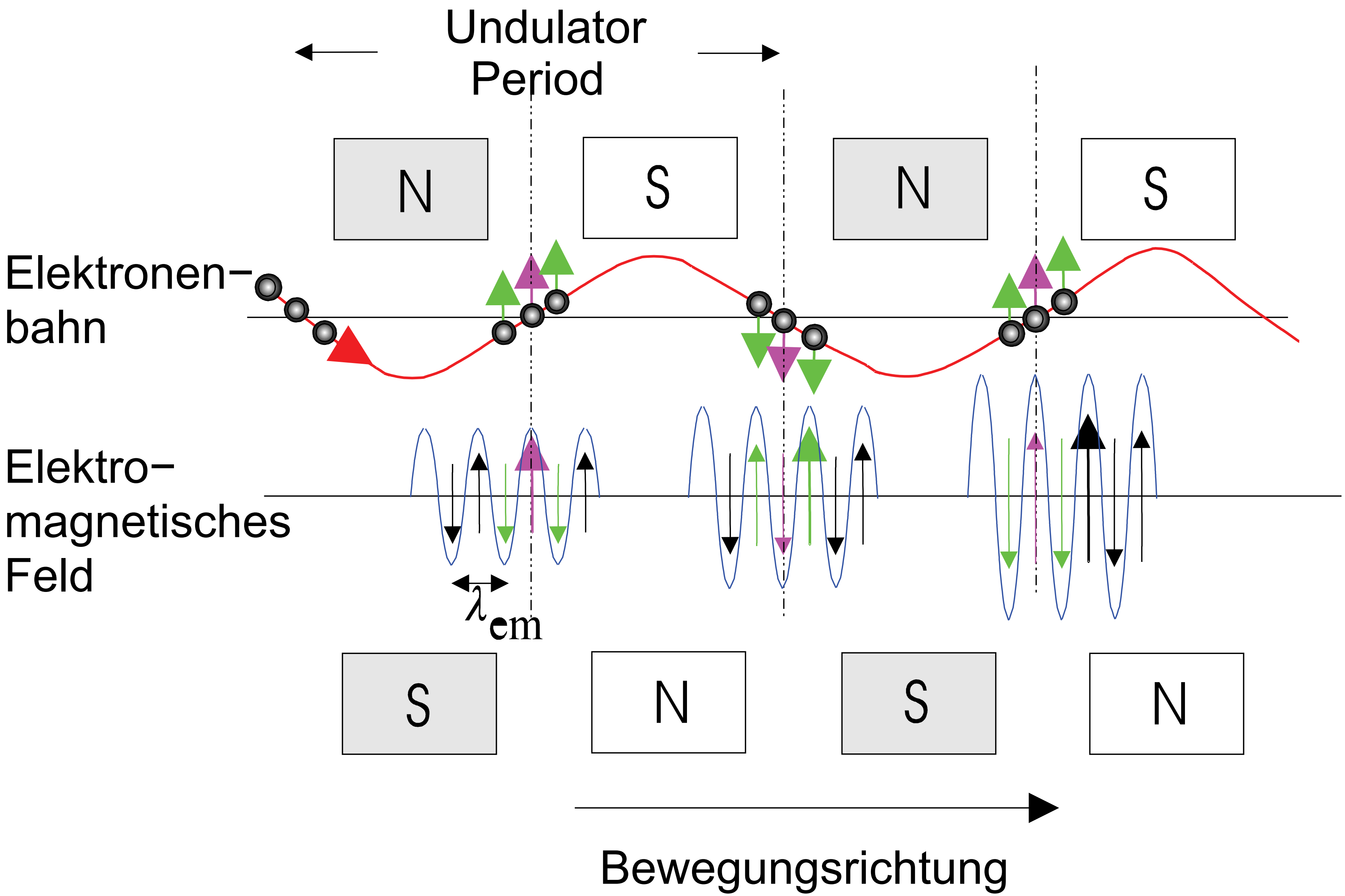
$$\begin{aligned} 0 &= (k \pm k_u)\beta^* - k = (k \pm k_u)\left[1 - \frac{1}{2\gamma^2}\left(1 + \frac{K^2}{2}\right)\right] - k \\ &\overset{k_u \ll k}{\approx} -\frac{k}{2\gamma^2}\left(1 + \frac{K^2}{2}\right) \pm k_u \end{aligned}$$

- Lösung ist nur für $+k_u$ möglich

$$k_u = \frac{k}{2\gamma^2}\left(1 + \frac{K^2}{2}\right)$$

- Das entspricht genau der Bedingung, die wir schon für die von einem Undulator abgestrahlte Wellenlänge λ kennen
- Was bedeutet diese Bedingung ?

FEL Energieübertrag



FEL Mikrobunching

- Für den Energiegewinn hatten wir zwei Gleichungen

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{eE_0K}{2\gamma mc}\left(\cos[(k+k_u)z-\omega t]+\cos[(k-k_u)z-\omega t]\right)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{e}{mc}\vec{\beta}\cdot\vec{E}_{FEL}$$

- Wechselwirkung von Elektronenstrahl und FEL-Feld kann durch ein effektives axiales elektrisches Feld beschrieben werden

$$E_z^{eff} = \frac{eB_0E_0\lambda_u}{4\pi mc\gamma\beta_z}\cos[(k_u+k)z-\omega t]$$

- Dies entspricht einem ponderomotivem (effektivem) Potential

$$V_{pond} = \frac{eB_0E_0\lambda_u}{4\pi mc\gamma\beta_z(k_u+k)}\sin[(k_u+k)z-\omega t],$$

das sich entlang der Undulator Achse ausbreitet.

FEL Theorie

- Um die Bewegung der Elektronen in diesem Potential zu verstehen muß die Bewegunggleichung der Elektronen gelöst werden
- Beim Undulator wurde nur die Wechselwirkung mit dem Undulatorfeld B_u berücksichtigt

FEL – Wechselwirkung mit drei Feldern

1. Undulatorfeld B_u wie schon bekannt
2. Elektromagnetisches Feld der Laserwelle
3. Feld durch die Ladungsdichteverteilung der Elektronen

FEL Theorie

- Im folgenden wird ein helikaler Undulator vorausgesetzt, da es in diesem nicht zu der komplizierten Kopplung der transversalen und longitudinalen Geschwindigkeiten v_x und v_z kommt
- keine höheren Ordnungen
- Magnetfeld
$$\vec{B}_u = \vec{e}_x B_0 \cos k_u z - \vec{e}_y B_0 \sin k_u z$$

FEL Theorie – Lösungsschritte

1. Berechne und löse die Bewegungsgleichung der Elektronen im FEL
2. Verstärkung bei kleinem Laser Feld
3. Berechne das elektromagnetische FEL Feld in einer 1-dimensionalen Näherung
4. Verstärkung bei mittlerem Laser Feld (linearer Bereich)
5. Sättigung
6. Berücksichtige den statistischen Character der FEL Strahlung (SASE)

FEL Theorie – Elektronen

- Lorentzkraft $\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}_u$
- Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m\gamma \frac{dv_x}{dt} &= ev_z B_y = -ev_z B_0 \sin k_u z \\ m\gamma \frac{dv_y}{dt} &= -ev_z B_x = -ev_z B_0 \cos k_u z \end{aligned}$$

- Wähle komplexe Schreibweise

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= v_x + iv_y, dz = v_z dt \\ \Rightarrow m\gamma \frac{d\tilde{v}}{dz} &= -ie(B_x + iB_y) = -ieB_0 \exp(-ik_u z) \end{aligned}$$

Integration

$$\frac{\tilde{v}}{c} = \frac{K}{\gamma} \exp(-ik_u z) \quad \text{und} \quad \vec{v}_\perp = c\frac{K}{\gamma}(\vec{e}_x \cos k_u z - \vec{e}_y \sin k_u z)$$

FEL Theorie – EM Welle

- Zirkular polarisierte EM Welle parallel zum Elektronenstrahl
  Energieaustausch war

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= mc^2\frac{d\gamma}{dt} = -e\vec{v}_\perp \cdot \vec{E}_\perp \\ \vec{E}_\perp &= E_L\left[\vec{e}_x \cos\left(\omega(\frac{z}{c}-t)\right) - \vec{e}_y \sin\left(\omega(\frac{z}{c}-t)\right)\right] \end{aligned} \tag{11}$$

  T : Energie des Elektronenstrahl
- mit $dz = v_z dt$ und Einsetzen in Gleichung (11) folgt ($v_z \cong c$)

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dz} &= \frac{dT}{dt}\frac{dt}{dz} = -\frac{e}{v_z}(v_x E_x + v_y E_y) \\ &\cong -e\frac{K}{\gamma}E_L\left[\cos(k_u z)\cdot\cos\left(\omega(\frac{z}{c}-t)\right)\right. \\ &\quad \left. -\sin(k_u z)\cdot\sin\left(\omega(\frac{z}{c}-t)\right)\right] \end{aligned}$$

FEL Theorie – EM Welle

$$
\begin{aligned}
\frac{dT}{dz} &= -e\frac{K}{\gamma}E_L \cos\left[k_u z + \omega(\frac{z}{c} - t)\right] \\
\Rightarrow \frac{dT}{dz} &= -e\frac{K}{\gamma}E_L \cos\Psi
\end{aligned}
\tag{12}
$$

FEL Theorie – Phase

- Phasenbedingung für die Resonanz war

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\Psi}{dt} = k_u v_z + \frac{\omega}{c} v_z - \omega \\ \Rightarrow d\Psi &= k_u dz + \frac{\omega}{c} dz - \omega dt \\ \Leftrightarrow k_u &+ \frac{\omega}{c} - \frac{\omega}{v_z} = 0 \end{aligned}$$

- Außerhalb der Resonanz ist

$$\frac{d\Psi}{dz} = \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{dt}{dz} = k_u + \frac{\omega}{c} - \frac{\omega}{v_z(T)} \neq 0$$

  Die Phase Ψ ändert sich, da v_z sich mit der Energie T ändert
- Entwickeln von $1/v_z(T)$ um die Energie T_0 bis zur 1. Ordnung

$$\frac{d\Psi}{dz} = k_u + \frac{\omega}{c} - \frac{\omega}{v_z(T_0)} + \frac{\omega}{v_z^2(T_0)} \frac{dv_z}{dT} (T - T_0) \tag{13}$$

FEL Theorie – Phase

- $dv_z/dT = ?$

$$\frac{dT}{dv_z} = mc^2 \frac{d\gamma}{dv_z} = mc^2 \frac{d}{dv_z}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$\frac{d\gamma}{dv_z} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\left(-\frac{2v_z}{c^2}\right)$$

mit $v_z \cong c$ folgt damit

$$\frac{dv_z}{dT} = \frac{c}{T_0\gamma^2}$$

- Einsetzen in Gleichung (13) liefert

$$\frac{d\Psi}{dz} = k_u + \frac{\omega}{c} - \frac{\omega}{v_z(T_0)} + \frac{\omega}{v_z(T_0)T_0\gamma^2}(T - T_0) \qquad (14)$$

$$= C + \frac{\omega}{v_z(T_0)T_0\gamma^2}(T - T_0)$$

FEL Theorie – Pendelgleichung

- Beachte: Wenn $T_0 = T_R$ (T_R: Resonanzenergie), dann ist $C = 0$
- Differenziere Gleichung (14) nach z und setze Gleichung (12) ein

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi}{dz^2} &= \frac{d}{dz}C + \frac{\omega}{v_z(T_0)T_0\gamma^2}\frac{d}{dz}(T - T_0) \\ &= -\frac{\omega}{v_z(T_0)T_0\gamma^2} \cdot \frac{eE_LK}{\gamma}\cos\Psi \end{aligned}$$

Pendelgleichung

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2} + \Omega^2\cos\Psi = 0 \tag{15}$$

- mit

$$\Omega^2 = \frac{\omega e E_L K}{v_z(T_0)T_0\gamma^3}$$

FEL – low gain Bereich

- Problem: Das Laserfeld E_L hängt im FEL selbst von der Elektronenbewegung ab
- Zunächst schwache Felder – "low gain" Bereich
- Energiegewinn des Laserfeld eines Elektrons

$$\Delta W_L = -mc^2 \Delta\gamma = \Delta T$$

- Im Feld gespeicherte Energie

$$W_L = \frac{\epsilon_0}{2} E_L^2 \cdot V$$

  V: vom Feld eingenommenes Volumen
- Verstärkung

$$G := \frac{\Delta W_L}{W_L} = -\frac{2}{\epsilon_0 E_L^2 V} \cdot \Delta T \qquad (16)$$

FEL – low gain Bereich

- Phasengleichung (14)

$$\Psi' = \frac{d\Psi}{dz} = k_u + \frac{\omega}{c} - \frac{\omega}{v_z(T_0)} + \frac{\omega}{v_z(T_0)T_0\gamma^2}(T - T_0)$$

- Phasendifferenz zwischen Anfang und Ende des Undulators

$$\begin{aligned}\Delta\Psi' &= \Psi'_E - \Psi'_A \\ &= \frac{\omega}{v_z(T_0)T_0\gamma^2}(T_E - T_A) = \frac{\omega}{v_z(T_0)mc^2\gamma^3}\Delta T \\ &\cong \frac{k}{mc^2\gamma^3}\Delta T = \frac{k}{\gamma^3}\Delta\gamma\end{aligned}$$

- Einsetzen in Gleichung (16) liefert somit

FEL – low gain Bereich

$$G = -\frac{2}{\epsilon_0 E_L^2 V} \cdot \frac{mc^2\gamma^3}{k} \Delta\Psi'$$

Verstärkung ergibt sich aus der Änderung der Phasendifferenz

- Bemerkung

$$\lambda_L = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2}(1 + \frac{K^2}{2}) \Leftrightarrow k_u = \frac{k}{2\gamma^2}(1 + \frac{K^2}{2}) \Rightarrow \frac{\gamma^2}{k} \cong \frac{1}{k_u}$$

$$G \cong -\frac{mc^2\gamma}{\epsilon_o E_L^2 V k_u} \Delta\Psi'$$

FEL – low gain Bereich

- An der Gesamtverstärkung sollen alle Elektronen eines Bunches beteiligt sein

$\Rightarrow$ Mittel über alle Elektronen und Anfangsphasen

$$
\begin{aligned}
< \Delta\Psi' > &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta\Psi'_i \\
\Rightarrow G &= -\frac{2}{\epsilon_0 E_L^2 V} \cdot \frac{mc^2\gamma^3}{k} < \Delta\Psi' > \\
&= -\frac{2mc^2\gamma^3}{\epsilon_0 E_L^2 k} n_B < \Delta\Psi' >
\end{aligned}
$$

- Elektronendichte im Bunch ist $n_B := \frac{n}{V}$

$\Rightarrow$ Die Verstärkung ist also proportional zur Elektronendichte n_B

$\Rightarrow$ Elektronenstrahl muß eine kleine Emittanz haben !

FEL – low gain Bereich

- Berechnung von $\Psi'(z)$ aus der Pendelgleichung (15)

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2} + \Omega^2 \cos\Psi = 0$$

- Multipliziere mit $2\frac{d\Psi}{dz}$

$$2\frac{d\Psi}{dz}\frac{d^2\Psi}{dz^2} + 2\Omega^2\frac{d\Psi}{dz}\cos\Psi = 0$$

- Integration

$$\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2 + 2\Omega^2 \sin\Psi = C$$

- Phasendifferenz eines Elektrons zwischen Anfang und Ende des Undulators

$$\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2_E - \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2_A = 2\Omega^2(\sin\Psi_A - \sin\Psi_E) \qquad (17)$$

FEL - low gain Bereich

- Wir betrachten den Bereich um die Resonanzfrequenz T_0, so daß

$$\frac{d\Psi}{dz} = \frac{k}{T_0\gamma^2}\Delta T$$

- Einsetzen in (17) liefert

$$\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2 = \frac{k^2}{T_0^2\gamma^4}\Delta T^2 + 2\Omega^2(\sin\Psi_A - \sin\Psi_E)$$

- und somit

$$\frac{d\Psi}{dz} = \frac{k}{T_0\gamma^2}\sqrt{1 + \frac{2\Omega^2 T_0^2\gamma^4}{k^2\Delta T^2}(\sin\Psi_A - \sin\Psi_E)}$$

$$\frac{d\Psi}{dz} = \frac{k}{T_0\gamma^2}\sqrt{1 + \frac{2eE_L K}{\gamma k\Delta T^2}(\sin\Psi_A - \sin\Psi_E)}$$

- Die Gleichung läßt sich i.A. nicht mehr weiter integrieren

FEL – low gain 1. Order

- Schwaches Laser Feld $E_L \rightarrow$ Entwickeln von $\sqrt{\cdot}$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots$$

-

$$\frac{d\Psi}{dz} = \frac{k\Delta T}{T_0\gamma^2} \left[1 + \frac{eE_L K\gamma}{k\Delta T^2}(\sin\Psi_A - \sin\Psi(z)) \right. \\ \left. - \frac{1}{8}\left(\frac{eE_L K\gamma}{k\Delta T^2}\right)^2 (\sin\Psi_A - \sin\Psi(z))^2 + \ldots \right.$$

- Berechnung des Mittelwerts $< \frac{d\Psi}{dz} >$ in der 1. Ordnung

FEL – low gain 1. Order

- Phase $\Psi(z)$ im sin wird durch die 0. Ordnung bestimmt

$$\Psi_0' = \frac{k\Delta T}{T_0\gamma^2} \Rightarrow \Psi_0(z) = \frac{k\Delta T}{T_0\gamma^2} \cdot z$$

  Phasendifferenz zwischen Anfang und Ende ist somit

$$\Delta\Psi_0 = \frac{k\Delta T}{T_0\gamma^2} \cdot L_u = \frac{k\Delta T}{T_0\gamma^2} \cdot \lambda_u \cdot N$$

  $L_u = \lambda_u \cdot N$: Länge des Undulators, N: Periodenzahl

- Einsetzen in die 1. Ordnung

FEL – low gain 1. Order

- Phasenshift in der 1. Ordnung

$$\begin{aligned}\Delta\Psi'_1 &= \Psi'(z_0+L_u)-\Psi'(z_0)\\ &= \frac{eE_LK}{\gamma\Delta T}\left[-\underbrace{\sin\Psi(z_0+L_u)}_{=\sin\Psi_a+\Delta\Psi_0}+\underbrace{\sin\Psi(z_0)}_{=\sin\Psi_a}\right]\end{aligned}$$

- Mitteln über alle Anfangsphasen Ψ_A

$$\begin{aligned}<\Psi'>_1 &= \frac{eE_LK}{\gamma\Delta T}\underbrace{\int_0^{2\pi}d\Psi_A\left[\sin\Psi_A-\sin(\Psi_A+\frac{k\Delta T}{T\gamma^2}\lambda_u N)\right]}_{=0}\\ \Rightarrow G_1 &= 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Kein Energieübertrag/Verstärkung in der 1. Ordnung

$\Rightarrow$ FEL Verstärkung ist Prozess höherer Ordnung

- Berechnung der Verstärkung in 2. Ordnung

FEL – low gain 2. Order

- Berechnung der Phasendifferenz nun aus der 1. Ordnung

$$\Delta\Psi_1'(z) = \Psi'(z) - \Psi'(z_0) = \frac{eE_L K}{T_0 \gamma^3 \Delta T}\left[\sin\Psi_A - \sin()\,\frac{k\Delta T}{T\gamma^2} z + \Psi_A\right]$$

- Integration über die Undulatorlänge $L_u = N_u \cdot \lambda_u$

$$\Delta\Psi_1 = \frac{eE_L K}{T_0 \gamma^3 \Delta T}\left[N_u \cdot \lambda_u \sin\Psi_A - \int_0^{L_u} dz \sin\left(\frac{k\Delta T}{T\gamma^2} z + \Psi_A\right)\right]$$

Mathematica:

$$\int_0^L dz \sin(a/Lz + \Psi) - L\sin\Psi = \frac{L}{a}(\cos\Psi - \cos(a+\Psi) - a\sin\Psi)$$

FEL – low gain 2. Order

- Definiere

$$\frac{2w}{L_u} := \frac{k_L}{\gamma^2} \cdot \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta\Psi_0}{L_u}$$

$$L_u := N_u \lambda_u \text{ Länge des Undulators}$$

- Phasenshift in 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \Delta\Psi_1 &= \frac{eE_0 K}{T_0 \gamma^3 \Delta T} \frac{\gamma^2 T_0}{k_L \Delta T} [\cos\Psi_a - \cos(2w + \Psi_a) - 2w \sin\Psi_a] \\ &= \frac{eE_0 K}{\gamma \Delta T^2 k_L} [\cos\Psi_a - \cos(2w + \Psi_a) - 2w \sin\Psi_a] \qquad (18) \end{aligned}$$

FEL – low gain 2. Order

- Berechnung der Veränderung der Phasendifferenz in 2. Ordnung

$$
\begin{aligned}
\Delta\Psi_2' &= \Delta\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)_2 && (19)\\
&= \frac{k_L \Delta T}{T_0\gamma^2}\frac{1}{8}\left(\frac{2eE_0K}{\gamma k_L \Delta T^2}\right)^2 && (20)\\
&\quad\times\left(8\frac{\gamma k_L \Delta T^2}{2eE_0K}\left[\sin\Psi_a - \sin(\Delta\Psi_1 + \Delta\Psi_0 + \Psi_a)\right]\right.\\
&\quad\left. - \left[\sin\Psi_a - \sin(\Delta\Psi_0 + \Psi_a)\right]^2\right)
\end{aligned}
$$

FEL – low gain 2. order

- Im Low gain Bereich ist die Phasenänderung klein, so daß

$$
\begin{aligned}
\Delta\Psi_1 &\ll 1 \\
&\Rightarrow \sin\Psi_a - \sin(\Delta\Psi_1 + \Delta\Psi_0 + \Psi_a) \\
&\overset{\text{Taylor}}{\approx} \sin\Psi_a - \sin(\Delta\Psi_0 + \Psi_a) - \Delta\Psi 1 \cdot \cos(\Delta\Psi_0 + \Psi_a)
\end{aligned}
$$

- Einsetzen in Gleichung (20) liefert zusammen mit dem Wert für $\Delta\Psi_1$ aus Gleichung (18) somit

$$
\begin{aligned}
\Delta\Psi_2' = {} & \frac{k_L \Delta T}{T_0 \gamma^2} \frac{1}{8} \left(\frac{2eE_0K}{\gamma k_L \Delta T^2} \right)^2 \\
& \times \left\{ 8 \frac{\gamma k_L \Delta T^2}{2eE_0K} [\sin(\Delta\Psi_0 + \Psi_a) - \sin(\Psi_a)] \right. \\
& + 2\cos(\Delta\Psi_0 + \Psi_a) [\cos\Psi_a - \cos(2w + \Psi_a) - 2w \sin\Psi_a] \\
& \left. - [\sin\Psi_a - \sin(\Delta\Psi_0 + \Psi_a)]^2 \right\}
\end{aligned}
$$

FEL – low gain 2. order

- Jetzt muß wieder über alle Anfangsphasen Ψ_a gemittelt werden um alle Elektronen in einem Bunch zu berücksichtigen. Dabei erhält man dann

$$\begin{aligned} \langle \sin(\Delta\Psi_0 + \Psi_a) - \sin(\Psi_a) \rangle &= 0 \\ \langle \cos^2(\Delta\Psi_0 + \Psi_a) \rangle &= \frac{1}{2} \\ \langle \cos(\Delta\Psi_0 + \Psi_a) \cos\Psi_a \rangle &= \frac{1}{2} \cos\Delta\Psi_0 \\ \langle \cos(\Delta\Psi_0 + \Psi_a) \sin\Psi_a \rangle &= -\frac{1}{2} \sin\Delta\Psi_0 \end{aligned}$$

- Für die Änderung der Phasendifferenz in 2. Ordnung kann man dann schreiben

$$< \Delta\Psi_2' >= \frac{e^2 E_L^2 K^2}{2\gamma^4 k_L T_0 \Delta T^3} \left(1 - \cos\Delta\Psi_0 - \frac{\Delta\Psi_0}{2} \cdot \sin\Delta\Psi_0 \right)$$

FEL – low gain 2. Order

- Es war (Phasenshift in der 0. Ordnung)

$$\frac{k_L \Delta T}{\gamma^2 T_0} = \frac{\Delta\Psi_0}{L_u}$$

  $\Delta\Psi_0$ ist also proportional zur Abweichung der kinetischen ΔT von der Resonanzenergie T_0

- Ersetzt man ΔT noch durch $\Delta\Psi_0$ so ergibt sich für den Verlauf der Verstärkung G

$$G \propto < \Delta\Psi_2' > \propto \frac{1}{\Delta\Psi_0^3}\left(1 - \cos\Delta\Psi_0 - \frac{\Delta\Psi_0}{2} \cdot \sin\Delta\Psi_0\right)$$

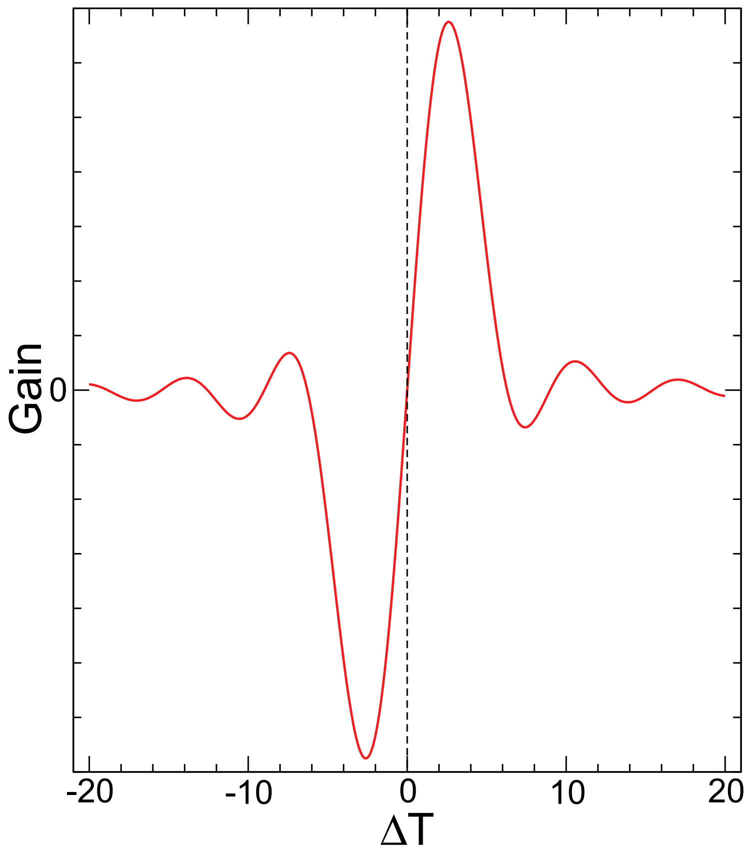
- Man kann leicht nachrechnen, dass gilt

$$\frac{d}{dw}\left(\frac{\sin w}{w}\right)^2 = -\frac{1}{w^3}\left(1 - \cos 2 \cdot w - w \cdot \sin 2 \cdot w\right)$$

FEL – low gain 2. Order

- Die Verstärkung kann dann in der Form

$$G \propto < \Delta\Psi_2' > \propto \frac{d}{dw}\left(\frac{\sin w}{w}\right)^2 \quad \text{mit } 2 \cdot w = \Delta\Psi_0$$



- Genau bei der Resonanzfrequenz $T = T_0$, $\Delta T = 0$ erfolgt keine Verstärkung
- Elektronen müssen mit etwas höherer Energie in den FEL eintreten
- bei kleineren Energien wird den Elektronen aus dem Laserfeld Energie zugeführt

$\Rightarrow$ Teilchenbeschleuniger

Take Home Message – FEL Low Gain

- Die transversale Geschwindigkeitskomponente im Undulator bewirkt den Energieübertrag vom EM Feld auf den Elektronenstrahl.
- Elektronen bewegen sich in einem ponderomotoven Potential aus Undulator Feld und Feld der Laserwelle.
- Wechselwirkung des Elektronenbunch mit Laserwelle erzeugt Mikrobunching der Elektronenbunches.
- Kohärente Bewegung der Elektronen in einem Mikrobunch.
- Bewegung der Elektronen im onderomotiven Potential kann durch eine Pendelgleichung beschrieben werden.
- FEL Verstärkung ist ein nichtlinearer Prozeß höherer Ordnung.