Synchrotronstrahlung

- Strahlung beschleunigter Teilchen
- Winkelverteilung
- Zeitstruktur
- Spektrum

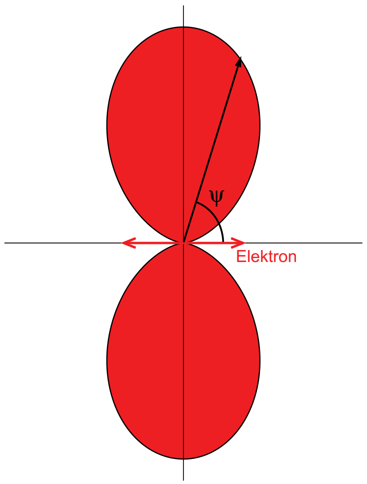
Strahlung beschleunigter Teilchen

Strahlung eines nichtrelativistischen, beschleunigten Teilchens

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 m_0^2 c^3}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2$$

- Winkelverteilung entspricht der eines Hertz'schen Dipol

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 m_0^2 c^3}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 \sin^2\psi.$$



Die Energie wird dabei wie beim Herz'schen Dipol senkrecht zur Richtung der Beschleunigung abgestrahlt.

Strahlung beschleunigter Teilchen

- relativistische Teilchen:
  Transformation der Zeit und des Viererimpulses

$$dt \quad \rightarrow \quad d\tau = \frac{1}{\gamma} dt, \gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\left(\frac{dP_\mu}{d\tau}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{d\vec{p}}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dE}{d\tau}\right)^2$$

- Relativistische abgestrahlte Leistung

$$P = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{1}{(m_0 c^2)^2} \left[\left(\frac{d\vec{p}}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dE}{d\tau}\right)^2\right]$$

-

Lineare-	Kreis-
Beschleunigung	
$\frac{dv}{dt} \| \vec{v}$	$\frac{d\vec{v}}{dt} \perp \vec{v}$

Lineare Beschleunigung

- relativistischer Energiesatz

$$E^2 = (m_0 c^2)^2 + p^2 c^2 \Rightarrow E\frac{dE}{d\tau} = c^2 p \frac{dp}{d\tau}$$

mit $E = \gamma m_0 c^2$ und $p = \gamma m_0 v$

$$\frac{dE}{d\tau} = v\frac{dp}{d\tau} \tag{1}$$

- Relativistische Strahlungsformel

$$\boxed{P = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0}\frac{1}{(m_0 c^2)^2}\left[\left(\frac{d\vec{p}}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dE}{d\tau}\right)^2\right]}$$

und einsetzen von (1) liefert

$$(1-\beta)^2\left(\frac{d\vec{p}}{d\tau}\right) = \left(\frac{d\vec{p}}{\gamma d\tau}\right) = \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)$$

Lineare Beschleunigung

$$P = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{1}{(m_0 c^2)^2} \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)^2 = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{1}{(m_0 c^2)^2} \left(\frac{d\vec{E}}{dx}\right)^2 \qquad (2)$$

- Beispiel:
  Energiegewinn

$$dE/dx = 25 MeV/m \Rightarrow P = 1.1 \cdot 10^{-16} W$$

- Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P}{dE/dt} = \frac{P}{v dE/dx} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(m_0 c^2)^2} \cdot \frac{1}{\beta} \frac{dE}{dx} \approx 10^{-13}$$

- Energieverlust kann vernachlässigt werden!

Kreisbeschleunigung

- Auf einer Kreisbahn bleibt die Teilchenenergie konstant

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow P = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{\gamma^2}{(m_0 c^2)^2} \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2$$

- Impulsänderung auf der Kreisbahn

$$\frac{dp}{dt} = p\omega = p\frac{v}{R} \approx p\frac{c}{R} = \frac{E}{R}$$

- Wir betrachten nur extrem relativistische Geschwindigkeiten mit $v \approx c$. Dann ist $p \cdot c \gg m_0 \cdot c^2$ und somit $E = p \cdot c$. Weiter ist $\gamma = E/m_0 c^2$.

$$P = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{(E/m_0 c^2)^2}{(m_0 c^2)^2} \left(\frac{E}{R} \right)^2 = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{1}{(m_0 c^2)^4} \frac{E^4}{R^2}$$

Kreisbeschleunigung

- Auf einer Kreisbahn bleibt die Teilchenenergie konstant

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow P = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{\gamma^2}{(m_0 c^2)^2} \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2$$

- Impulsänderung auf der Kreisbahn

$$\frac{dp}{dt} = p\omega = p\frac{v}{R} \approx p\frac{c}{R} = \frac{E}{R}$$

- Wir betrachten nur extrem relativistische Geschwindigkeiten mit $v \approx c$. Dann ist $p \cdot c \gg m_0 \cdot c^2$ und somit $E = p \cdot c$. Weiter ist $\gamma = E/m_0 c^2$.

$$P = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{(E/m_0 c^2)^2}{(m_0 c^2)^2} \left(\frac{E}{R} \right)^2 = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{1}{(m_0 c^2)^4} \frac{E^4}{R^2}$$

Kreisbeschleunigung

Abgestrahlte Leistung

$$P = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{1}{(m_0 c^2)^4} \frac{E^4}{R^2} \tag{3}$$

- Die abgestrahlte Leistung steigt also mit der 4. Potenz der Teilchenenergie und des Reziprokwertes der Ruhemasse m_0!

$$\Rightarrow \left(\frac{m_{\text{Proton}}}{m_e}\right) = 1836^4 = 1.1 \cdot 10^{14}!$$

$\Rightarrow$ Strahlung spielt nur bei Elektronen eine Rolle

Kreisbewegung: Energieverlust

- Gesamter Energieverlust während eines Umlaufes

$$\Delta E = \oint P dt = PT = P\frac{2\pi R}{c} = \frac{e^2}{3\epsilon_0 (m_0 c^2)^4} \frac{E^4}{R}$$

$$\Delta E[keV] = 88.5 \frac{E^4[GeV]}{R[m]}$$

Kreisbewegung: Energieverlust

Verlustleistung einiger Speicherringe

	L (m)	E (GeV)	R (m)	B (T)	ΔE (keV)	η (%)
BESSY I	62.4	0.8	1.78	1.50	20.3	$2.5 \cdot 10^{-4}$
BESSY II	240	1.7	4.36		$1.6 \cdot 10^{2}$	$9 \cdot 10^{-3}$
DORIS II	288	5.0	12.2	1.37	$4.5 \cdot 10^{3}$	$9 \cdot 10^{-2}$
ESRF	844	6.0	23.4	0.855	$4.9 \cdot 10^{3}$	$8.2 \cdot 10^{-2}$
PETRA II	2304	23.5	195	0.40	$1.4 \cdot 10^{5}$	0.6
LEP II	27000	70.0	3000	0.078	$7.1 \cdot 10^{5}$	1.1

- Die Verlustleistung steigt stark mit der Ringenergie an und ist um Größenordnungen höher als bei einem LINAC
- Synchrotron Speicheringe können effektiv Synchrotronstrahlung erzeugen

SR Winkelverteilung

- Wir wollen hier nur den Fall der Kreisbewegung betrachten, da nur dort nennenswert Strahlung emittiert wird.

Skizze der Herleitung

- Im Schwerpunktsystem des Elektrons entspricht die Emission der des Herz'schen Dipol
- Transformation dieser Verteilung in das Laborsystem

- Einfache Abschätzung
  Ein Photon möge in y'-Richtung senkrecht zur Bewegungrichtung x' und zur Beschleunigung in z'-Richtung emittiert werden.

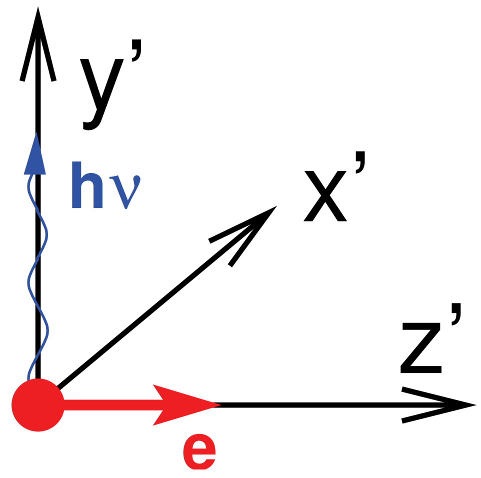
SR Winkelverteilung

- Ein Photon möge in y'-Richtung senkrecht zur Bewegungrichtung z' und zur Beschleunigung in x'-Richtung emittiert werden.

$$p'_y = p'_0 = \frac{E'}{c}$$

- Vierimpuls

$$P'_\mu = \begin{pmatrix} p'_t \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'/c \\ 0 \\ p'_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



SR Winkelverteilung

Lorentztransformation ins Laborsystem

$$P_\mu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E'/c \\ 0 \\ p'_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma E'/c \\ 0 \\ p'_0 \\ \gamma\beta E'/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma E'/c \\ 0 \\ p'_0 \\ \gamma\beta p'_0 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \left(1 - \beta^2\right)^{-1/2}$$

Winkel zwischen der y-Richtung und der z-Richtung (Flugrichtung)

$$\tan\theta = \frac{p_y}{p_z} = \frac{p'_0}{\beta\gamma p'_0} \approx \frac{1}{\gamma}$$

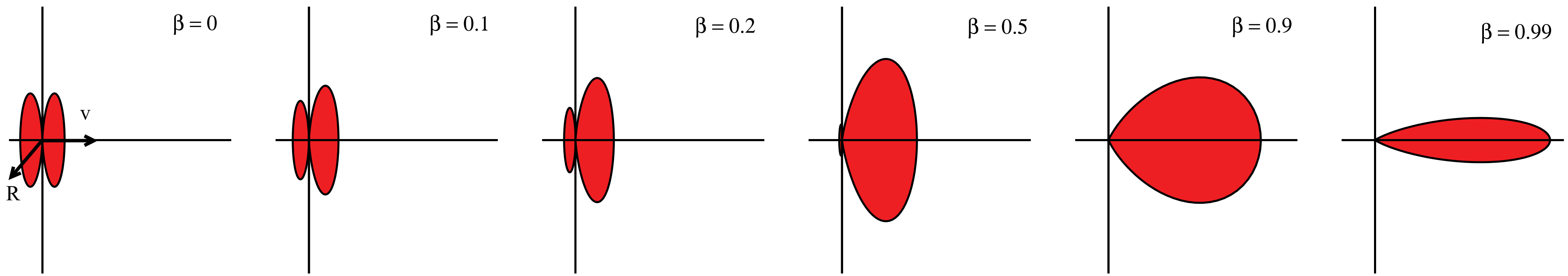
SR Winkelverteilung

Emittierte Strahlungsleistung in den Raumwinkel $d\Omega$

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{\dot{\beta}^2}{(1-\beta\cos\theta)^3} \left(1 - \frac{\sin^2\theta\cos^2\phi}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2}\right)$$

(Jackson)

- Scharfe Bündelung der Strahlung in Vorwärtsrichtung



Kreisbewegung (transversale Beschleunigung)

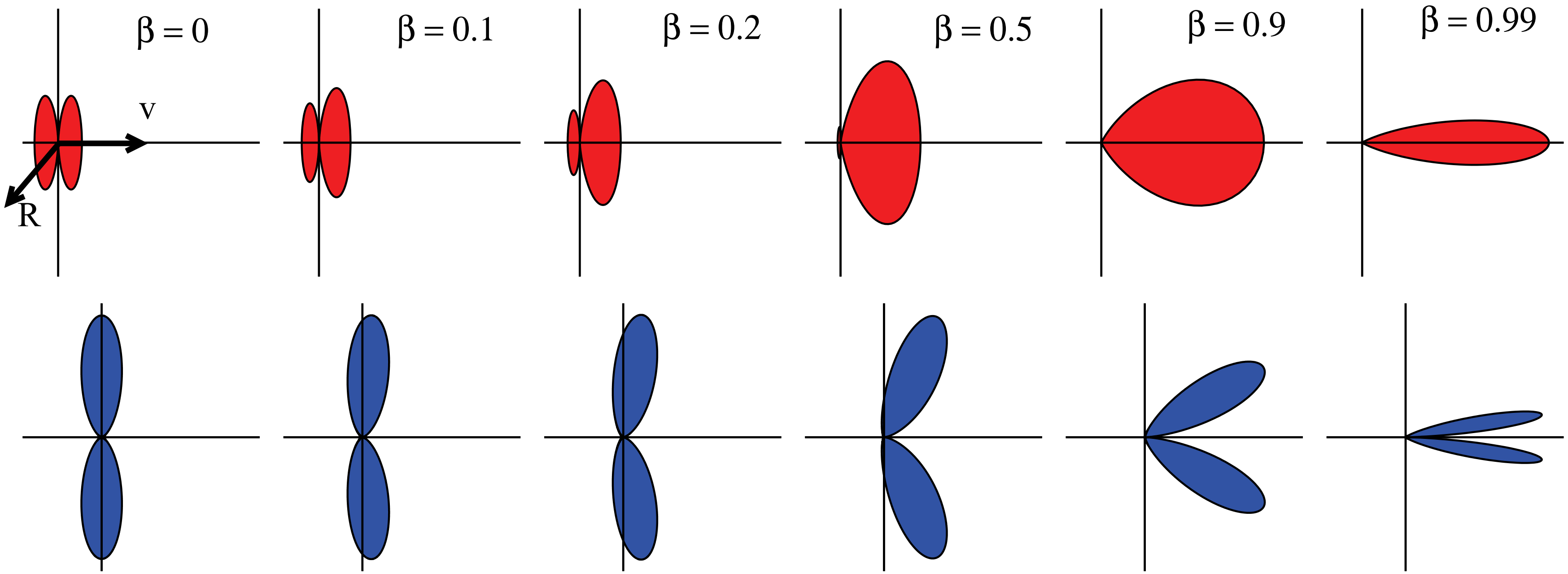
SR Winkelverteilung

- transversal

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{(d\beta/dt)^2}{(1-\beta\cos\theta)^3} \left(1 - \frac{\sin^2\theta\cos^2\phi}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2}\right)$$

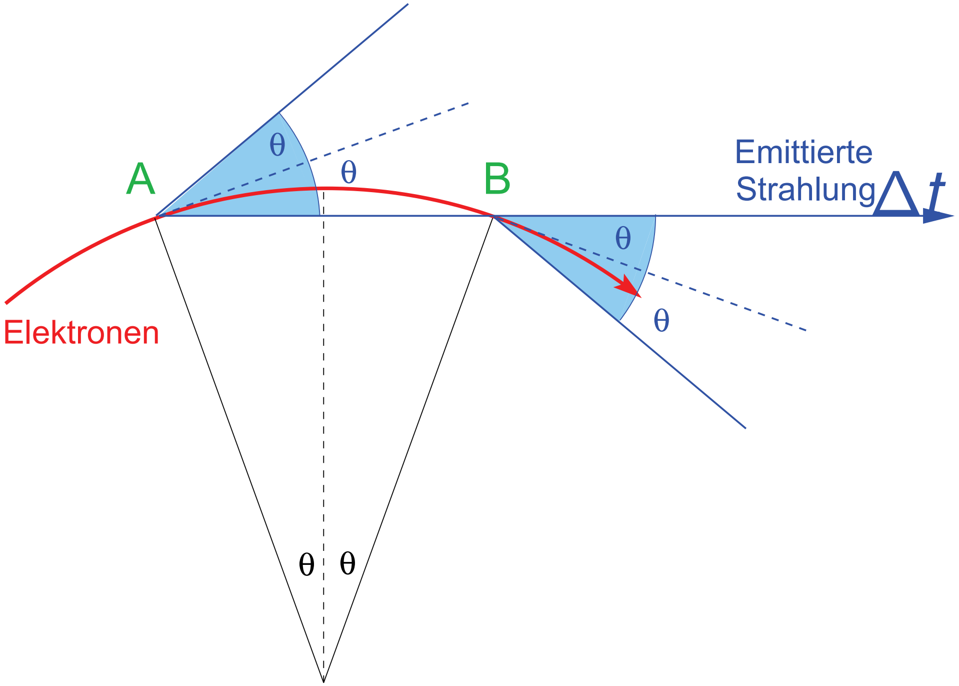
- longitudinal

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\sin\theta)^5} \cdot \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2$$



SR Zeitstruktur

“Vorbeiflug” eines Elektrons am Beobachter $\theta \approx 1/\gamma \Rightarrow$



$$
\begin{aligned}
\Delta t &= t_e - t_\gamma = \frac{2R\theta}{c\beta} - \frac{2R\sin\theta}{c} \\
&= \frac{2R}{c}\left(\frac{\theta}{\beta} - \theta + \frac{\theta^3}{3!} - \frac{\theta^5}{5! + \ldots}\right) \\
&\approx \frac{2R}{c}\left(\frac{1}{\beta\gamma} - \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{6\gamma^3}\right) \approx \frac{4R}{3c\gamma^3}
\end{aligned}
$$

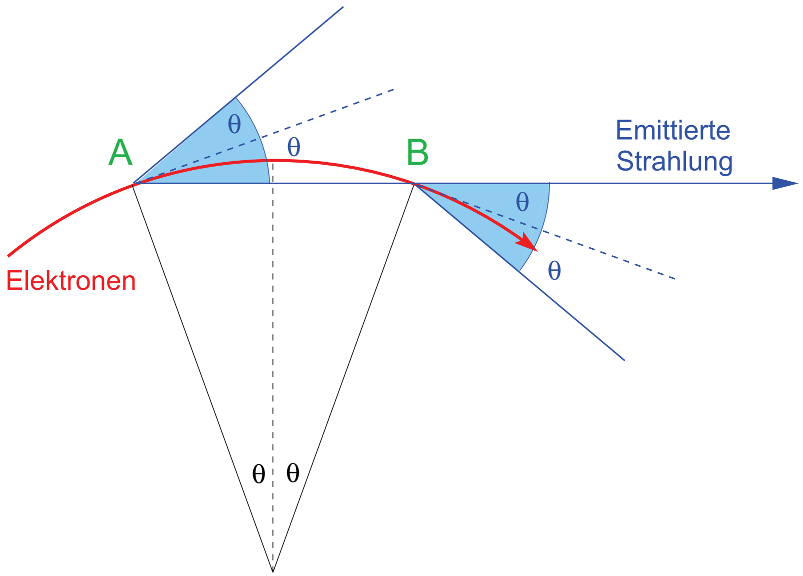
Typische Frequenz

$$\omega_{\mathrm{typ}} := \frac{2\pi}{\Delta t} = \frac{3\pi c\gamma^3}{2R}$$

Kritische Frequenz

$$\omega_c := \frac{\omega_{\mathrm{typ}}}{\pi} = \frac{3c\gamma^3}{2R}$$

SR Zeitstruktur



E (GeV)	γ	R (m)	Δt $(10^{-18}s)$	E_c (eV)
0.8	1566	1.8	2.1	631
1.7	3327	4.36	0.48	2725
6.0	11742	23.4	0.0064	20500

SR Spektrum

- Emittierte Strahlungsleistung in den Raumwinkel $d\Omega$ war

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{\dot{\beta}^2}{(1-\beta\cos\theta)^3} \left(1 - \frac{\sin^2\theta\cos^2\phi}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2}\right)$$

- Das abgestrahlte Spektrum kann durch eine Fouriertransformation des Zeitspektrum berechnet werden. Elementar, aber doch sehr aufwendig (siehe z.B. Jackson)!

SR Spektrum

- Emittierte Strahlungsleistung in den Raumwinkel $d\Omega$ war

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c}\frac{\dot{\beta}^2}{(1-\beta\cos\theta)^3}\left(1-\frac{\sin^2\theta\cos^2\phi}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2}\right)$$

PHYSICAL REVIEW VOLUME 75, NUMBER 12 JUNE 15, 1949

On the Classical Radiation of Accelerated Electrons

JULIAN SCHWINGER
Harvard University, Cambridge, Massachusetts

(Received March 8, 1949)

This paper is concerned with the properties of the radiation from a high energy accelerated electron, as recently observed in the General Electric synchrotron. An elementary derivation of the total rate of radiation is first presented, based on Larmor's formula for a slowly moving electron, and arguments of relativistic invariance. We then construct an expression for the instantaneous power radiated by an electron moving along an arbitrary, prescribed path. By casting this result tion of motion is a strongly preferred direction of emission at high energies. The spectral distribution of the radiation depends upon the detailed motion over a time interval large compared to the period of the radiation. However, the narrow cone of radiation generated by an energetic electron indicates that only a small part of the trajectory is effective in producing radiation observed in a given direction, which also implies that very high frequencies are emitted. Accordingly, we

SR Spektrum

- Spektrale Photonendichte, mit N Elektronen im Speicherring (Schwinger[1])

$$\frac{d\dot{N}}{d\epsilon/\epsilon} = \frac{P_0}{E_c} \cdot S_s\left(\frac{E}{E_c}\right)$$

mit

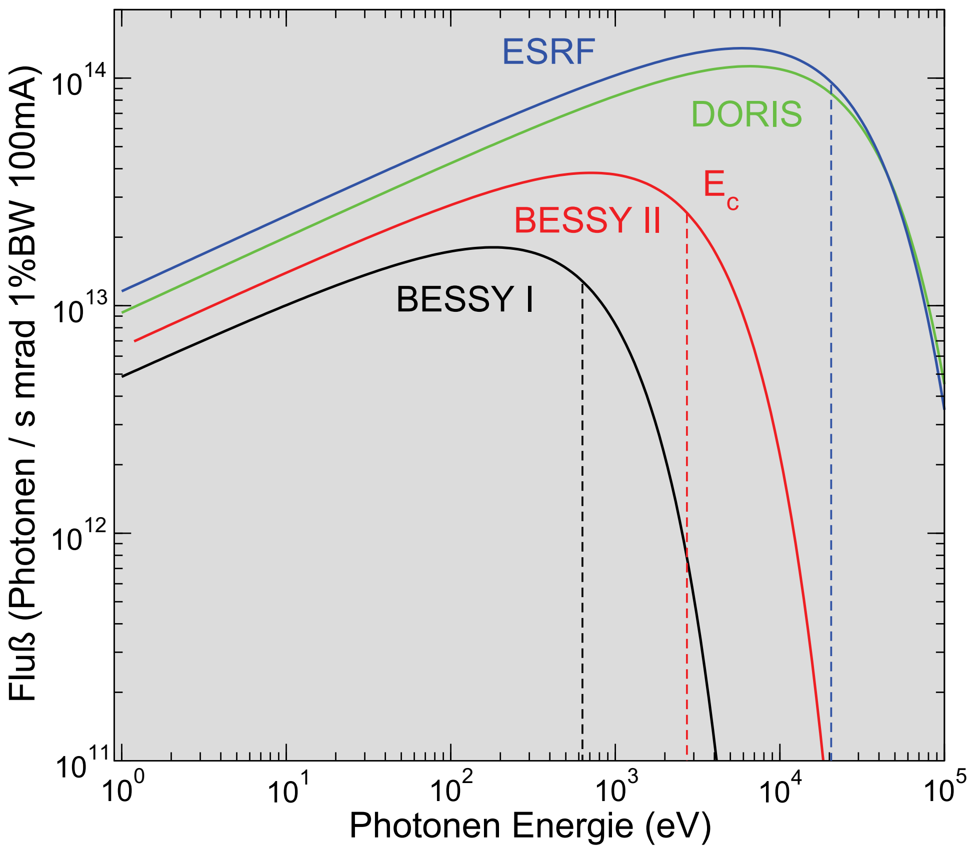
$$P_0 = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{1}{(m_0 c^2)^4} \frac{E^4}{R^2} N = \frac{e\gamma^4}{3\epsilon_0 R} I_{Ring}$$

$$S_s(\xi) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \cdot \xi \cdot \int_\xi^\infty K_{5/3}(\xi) d\xi$$

$K_{5/3}$: modifizierte Besselfunktion

[1] J. Schwinger, Phys. Rev. **75** 1912-1925 (1949)

SR Spektrum



- Strahlungsquelle, die einen sehr weiten Bereich abdeckt.
- $$\int_0^1 S_s(\xi)d\xi = \frac{1}{2}$$

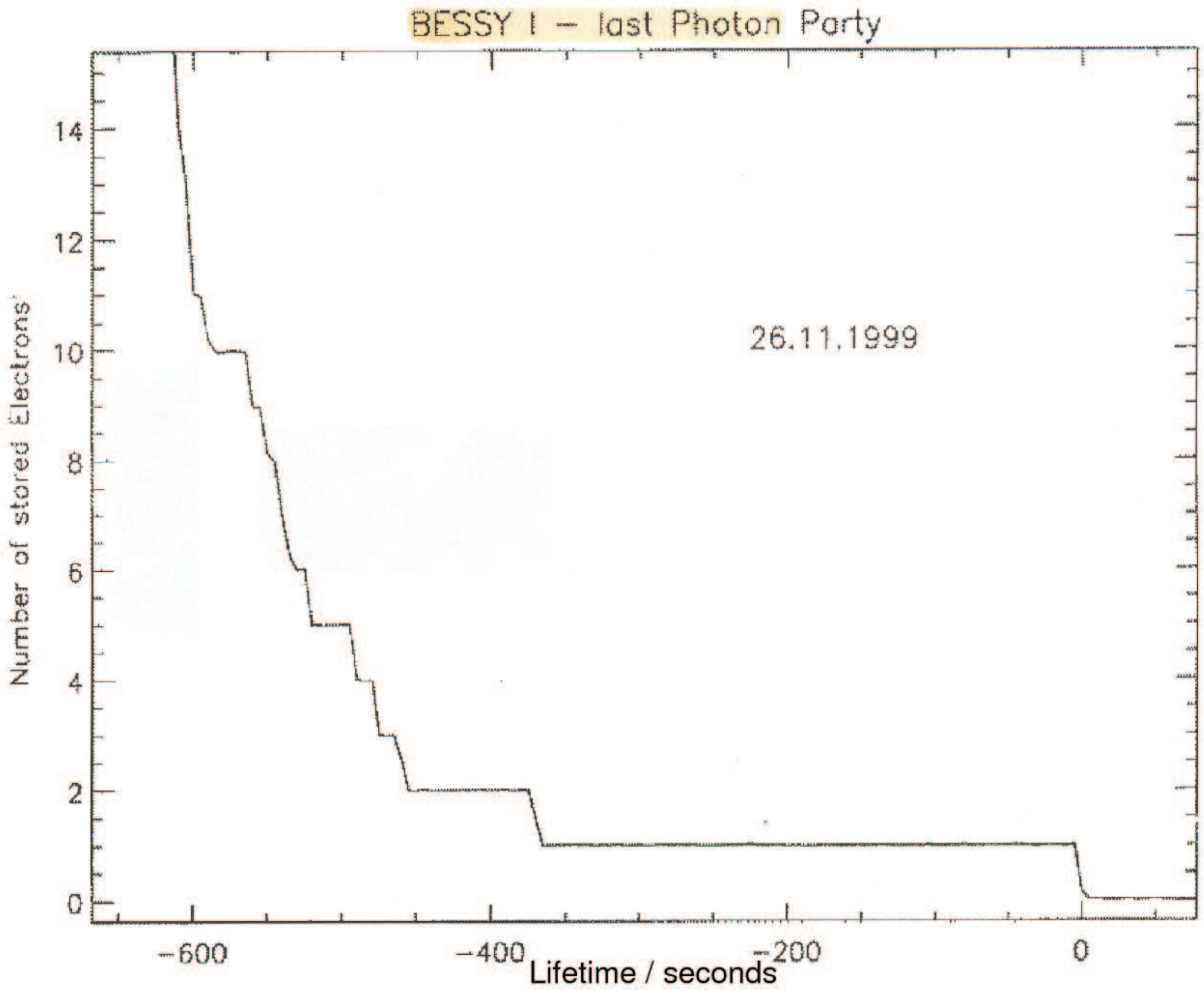
$\Rightarrow$ E_c teilt das Spektrum der Synchrotronstrahlung in zwei Bereiche gleicher Strahlungsleistung

- Spektrum ist exakt berechenbar

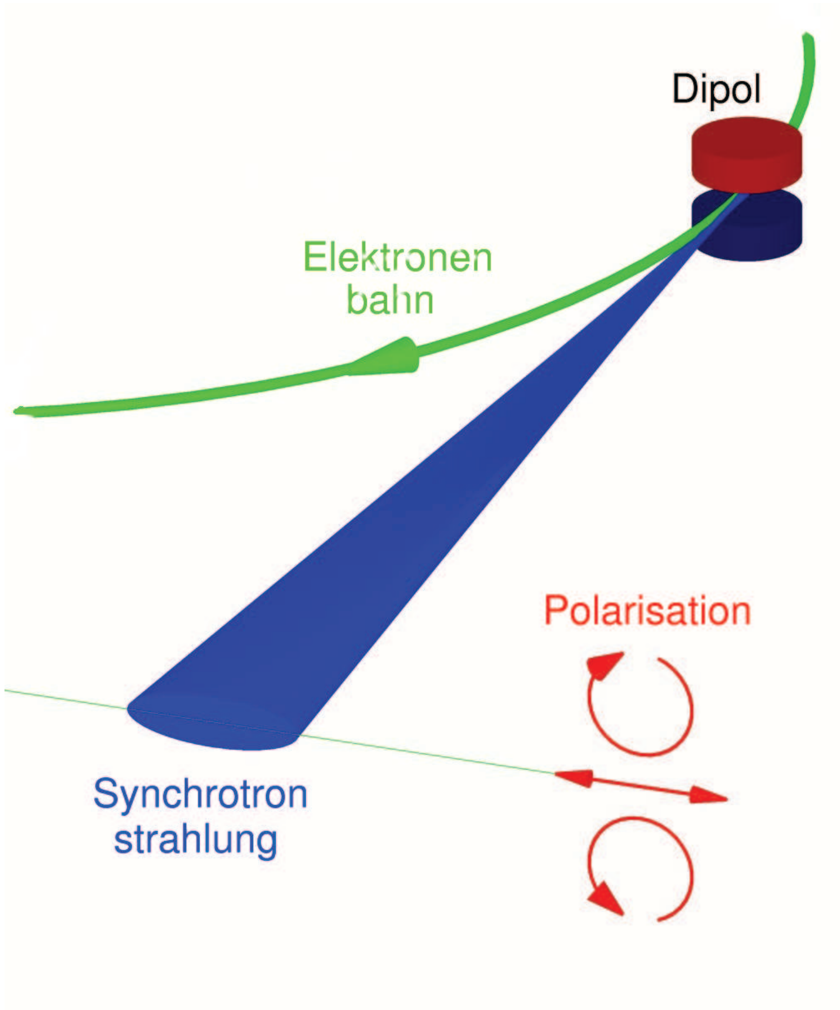
$\Rightarrow$ Primär Normal!

- Zählen einzelner Elektronen möglich (Anwendung in der Metrologie)

SR einzelner Elektronen



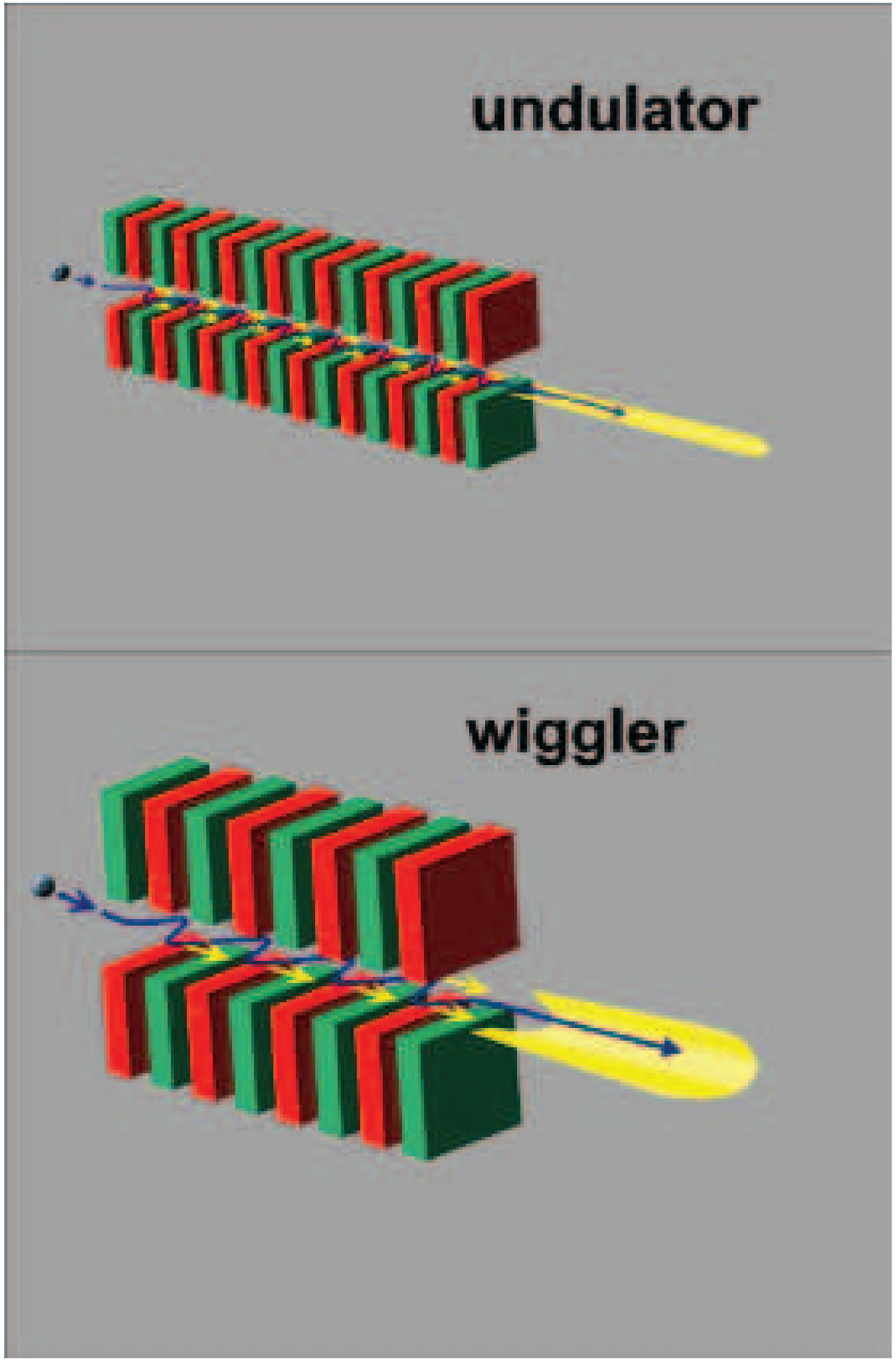
SR Polarisation



- Synchrotronstrahlung ist in der Bahnebene linear polarisiert
- Ausserhalb der Bahnebene ist die Strahlung zirkular polarisiert, mit allerdings stark abnehmender Intensität, durch die starke Bündelung in Vorwärtsrichtung
- Kann als Projektion der Kreisbahn verstanden werden
- Eigenschaft hat eine ganze Gruppe von neuen Experimenten zum Magnetismus eröffnet

Take Home Message – Synchrotronstrahlung

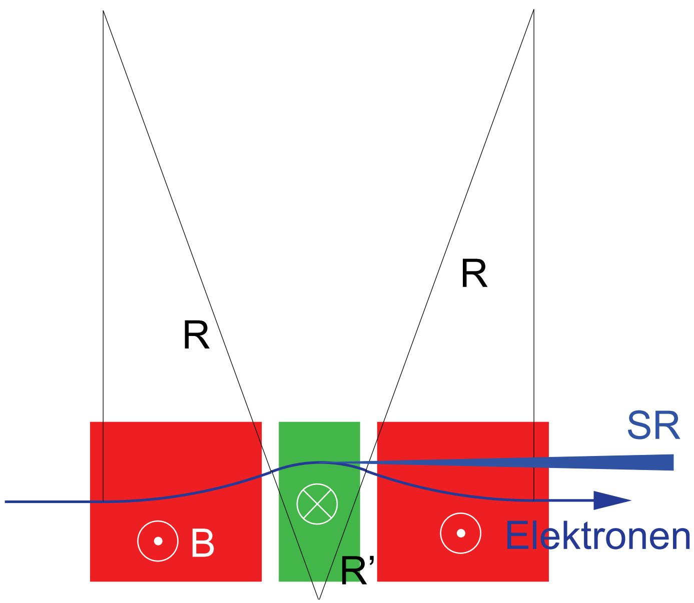
- Synchrotronstrahlung wird von beschleunigten, hochrelativistischen Teilchen abgestrahlt.
- Abstrahlung spielt nur bei der Kreisbeschleunigung eine Rolle.
- Für die abstrahlte SR Leistung gilt $P \propto (m_0 c^2)^{-4} E^4 / R^2$.
- Abstrahlung bei Elektronen ist $1836^4 \approx 10^{14}$ stärker als für Protonen.
- Starke Vorwärtsrichtung der SR mit Öffnungwinkel $\theta \cong 1/\gamma$.
- Sehr breite spektrale Verteilung der SR vom Infrarot bis in den harten Röntgenbereich.
- Kritische Energie E_c teilt Spektrum in Bereiche gleicher integraler Strahlungsleistung.



Insertion Devices

- Wavelength-Shifter
- Das Wiggler/Undulator Feld
- Bewegungsgleichung
- Undulator Strahlung
- Eigenschaften
- Polarisation

Wellenlängenschieber



- In einem Speicherring gilt für die kritische Energie

$$E_c \propto 1/R$$

R: Radius in den Dipolmagneten
R kann nicht einfach verändert werden

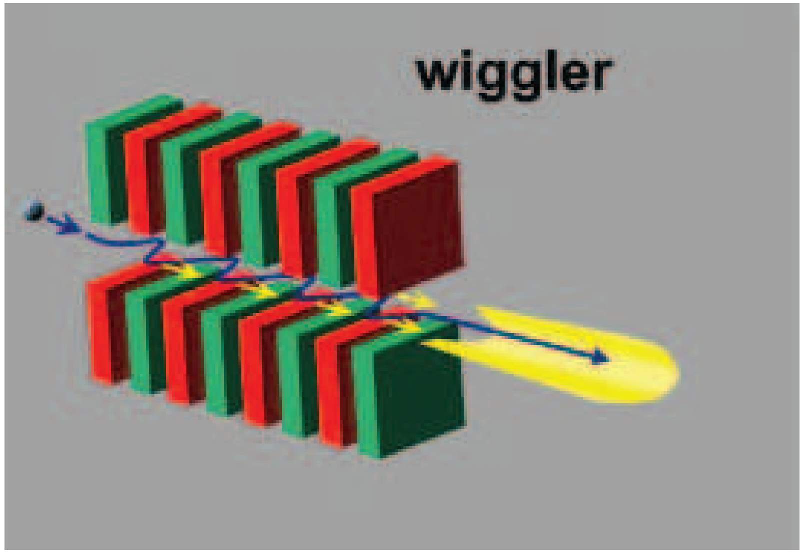
- In einer einfachen 3-Pol Struktur kann der Ablenkradius in einem Segment durch ein entsprechend starkes Magnetfeld $\vec{B}$ der effektive Radius R' verkleinert werden

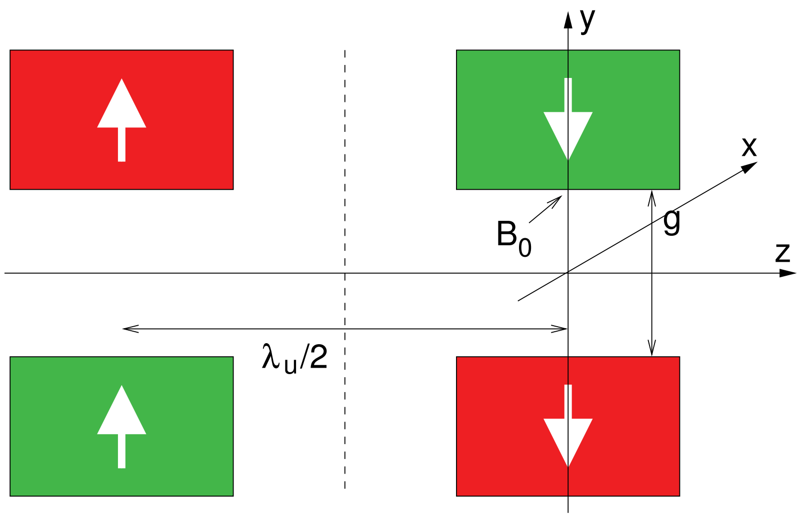
$\Rightarrow$ Höhere Photonenenergien sind möglich

- Abstrahlcharakteristik wie ein Dipol
- Um entsprechend hohe Magnetfelder von einigen Tesla erreichen zu können sind supraleitende Magnete erforderlich

Wiggler

Periodische Magnetfeldanordnung mit der Periode λ_u und N Polen





- Potential entlang der Strahlachse

$$\phi(z,y) = f(y)\cos\frac{2\pi}{\lambda_u}z$$

Laplace-Gleichung

$$\nabla^2\phi(z,y) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2 f(y)}{dy^2} - f(y)\left(\frac{2\pi}{\lambda_u}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(y) = A\cdot\sinh\left(\frac{2\pi}{\lambda_u}y\right)$$

$$\text{mit} \quad A = \frac{B_0}{\frac{2\pi}{\lambda_u}\cosh\left(\pi\frac{g}{\lambda_u}\right)}$$

Wiggler / Undulator Feld

- B-Feld Komponente auf der Achse

$$B_y(z,y) = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{2\pi}{\lambda_u} A \cosh \frac{2\pi}{\lambda_u} y \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

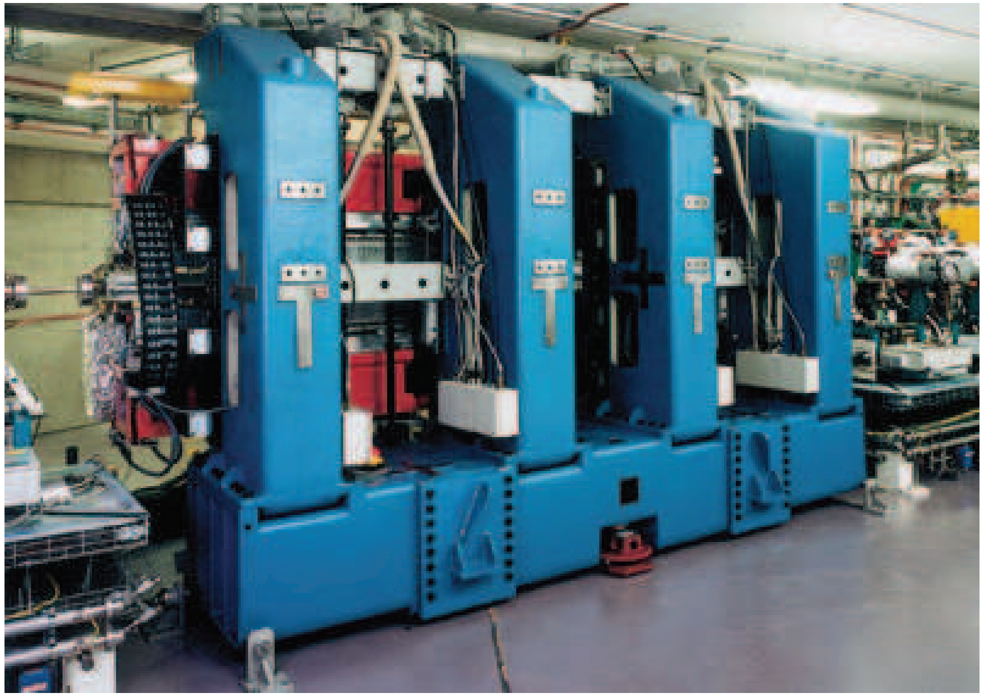
- Strahlachse $y = 0$

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \frac{B_0}{\cosh \pi \frac{g}{\lambda_u}} \\ B_y(z) &= \bar{B} \cos \frac{2\pi}{\lambda_u} z \end{aligned}$$

- Durch Variation des Polabstandes g (Gap) kann das Magnetfeld $B_y(z)$ auf der Strahlachse definiert variiert werden
- Realisierung von Wigglern / Undulatoren
  - Großes λ_u ($> 20\ cm$): Elektromagnete, g fest
  - Kleines λ_u: Permanentmagnete, g variable ($g \geq 15\ mm$)

Undulatoren

- Frequenz der emittierten Strahlung (in 0. Ordnung): relativistische Längenkontraktion der Period λ_u



Undulator Bewegungsgleichung

- Bewegung im Undulatorfeld

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

- Annahmen
  - Im Wiggler/Undulator ist $\vec{E} \approx 0$, was sich im Fall von langen Undulatoren (FEL) ändert!
  - $\vec{v} \approx \vec{v}_z$
- Bewegung in x-Richtung

$$\begin{aligned} m_0\gamma\frac{dv_x}{dt} &= ev_zB_y(z) \\ &= e\frac{dz}{dt}\bar{B}\cos\frac{2\pi}{\lambda_u}z \end{aligned}$$

- Integration

Undulator

Bewegung in x-Richtung

$$m_0 \gamma v_x = \frac{e\bar{B}\lambda_u}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

Beachte:

z ist nicht linear in der Zeit, da v_z selbst von t abhängt. Die Bewegung in x Richtung ist also keine reine harmonische Schwingung $\Rightarrow$ Höhere Harmonische

Undulator Parameter

- Bewegung in x-Richtung

$$m_0 \gamma v_x = \frac{e\bar{B}\lambda_u}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

$$\Rightarrow \qquad v_x = \frac{e\bar{B}\lambda_u c}{2\pi m_0 \gamma c} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

$$v_x = \frac{Kc}{\gamma} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

$$\text{mit} \quad K := \frac{e\bar{B}\lambda_u}{2\pi m_0 c}$$

Undulator Parameter K

- $v_z \approx c \Rightarrow$

$$\tan \theta_e(z) \approx \theta_e(z) = \frac{v_x}{v_z} \approx \frac{K}{\gamma} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z \quad \Rightarrow \quad |\theta_{e,max}| \approx \frac{K}{\gamma}$$

Undulator Parameter

- Bewegung in x-Richtung

$$m_0 \gamma v_x = \frac{e\bar{B}\lambda_u}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

$$\Rightarrow \qquad v_x = \frac{e\bar{B}\lambda_u c}{2\pi m_0 \gamma c} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

$$v_x = \frac{Kc}{\gamma} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

$$\text{mit} \quad K := \frac{e\bar{B}\lambda_u}{2\pi m_0 c}$$

Undulator Parameter K

- $v_z \approx c \Rightarrow$

$$\tan \theta_e(z) \approx \theta_e(z) = \frac{v_x}{v_z} \approx \frac{K}{\gamma} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z \quad \Rightarrow \quad |\theta_{e,max}| \approx \frac{K}{\gamma}$$

Undulator Parameter

Charakteristischer Abstrahlwinkel der SR: $\theta = 1/\gamma$, $\theta_e = K/\gamma$

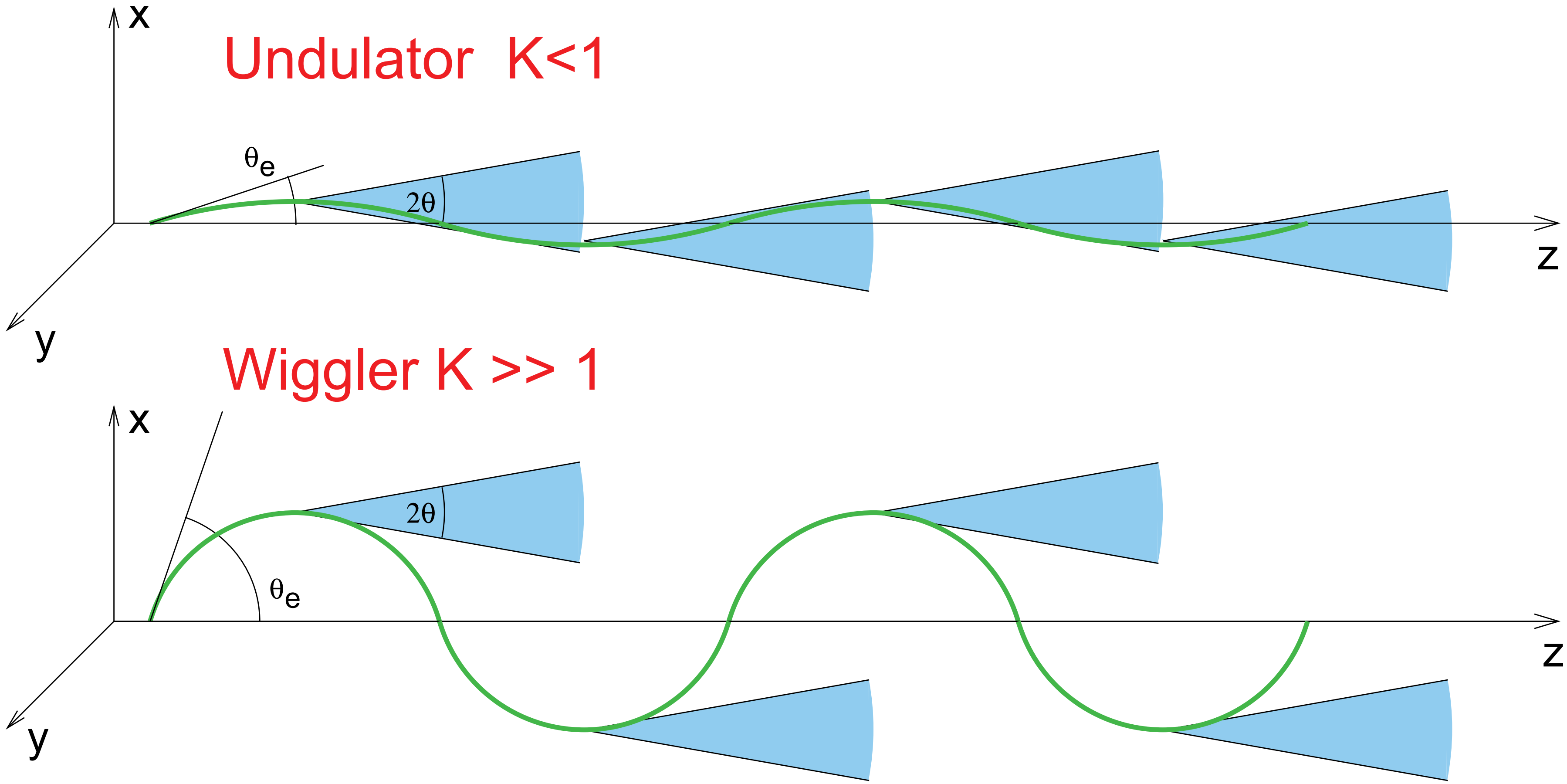
$K \leq 1$ Undulator

Abstrahlkegel der einzelnen Magnetpole überlappen $\rightarrow$ kohärente Überlagerung $\rightarrow$ Interferenzeffekte

$K \gg 1$ Wiggler

Abstrahlkegel der einzelnen Magnetpole überlappen nicht $\rightarrow$ Nicht kohärente Überlagerung $\rightarrow$ Emittierte Strahlung entspricht weitgehend der eines Dipols, aber mit $2 \cdot N$ facher Intensität.
Verschiebung der kritischen Energie E_c abhängig von $\bar{B}$.

Undulator Parameter



Undulator: z-Richtung

- Energie ist im B-Feld konstant $\Rightarrow \gamma =$const.

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{v_x^2 + v_z^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{v_z^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} - \frac{v_x^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} - \frac{K^2}{\gamma^2}\sin^2\frac{2\pi}{\lambda_u}z$$

- $K/\gamma \ll 1$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$:

$$\begin{aligned}\frac{v_z}{c} &= 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{K^2}{2\gamma^2}\sin^2\frac{2\pi}{\lambda_u}z \\ &= 1 - \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2} + \frac{K^2}{4\gamma^2}\cos 2\frac{2\pi}{\lambda_u}z \\ \frac{v_x}{c} &= \frac{K}{\gamma}\sin\frac{2\pi}{\lambda_u}z\end{aligned}$$

Undulator: z-Richtung

- Energie ist im B-Feld konstant $\Rightarrow \gamma =$const.

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{v_x^2 + v_z^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{v_z^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} - \frac{v_x^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} - \frac{K^2}{\gamma^2} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

- $K/\gamma \ll 1$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$:

$$\begin{aligned} \frac{v_z}{c} &= 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{K^2}{2\gamma^2} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda_u} z \\ &= 1 - \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2} + \frac{K^2}{4\gamma^2} \cos 2\frac{2\pi}{\lambda_u} z \\ \frac{v_x}{c} &= \frac{K}{\gamma} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z \end{aligned}$$

Undulator: z-Richtung

- Energie ist im B-Feld konstant $\Rightarrow \gamma =$const.

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{v_x^2 + v_z^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{v_z^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} - \frac{v_x^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} - \frac{K^2}{\gamma^2}\sin^2\frac{2\pi}{\lambda_u}z$$

- $K/\gamma \ll 1$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$:

$$\begin{aligned} \frac{v_z}{c} &= 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{K^2}{2\gamma^2}\sin^2\frac{2\pi}{\lambda_u}z \\ &= 1 - \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2} + \frac{K^2}{4\gamma^2}\cos 2\frac{2\pi}{\lambda_u}z \\ \frac{v_x}{c} &= \frac{K}{\gamma}\sin\frac{2\pi}{\lambda_u}z \end{aligned}$$

Undulator: z-Richtung

- Oszillation in z-Richtung mit der doppelten Frequenz

$$\frac{v_z}{c} = 1 - \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2} + \frac{K^2}{4\gamma^2} \cos 2\frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

$$\frac{v_x}{c} = \frac{K}{\gamma} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

- $$\frac{2\pi}{\lambda_u} z \approx \frac{2\pi}{\lambda_u} v_z t \approx \frac{2\pi}{\lambda_u} ct \approx 2\pi\nu_u t \approx \omega_u t$$

Undulator Energie

Wellenlänge der Undulator Strahlung λ

relativistische Längenkontraktion von λ_u

$$\lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma^{*2}}(1 + \gamma^{*2}\theta^2) \tag{4}$$

- v_z ist nicht konstant $\Rightarrow \gamma_* = \left(1 - \frac{v_z^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ variiert $\Rightarrow \lambda$ variiert
- Wie verändert sich γ^* ?
- Berechnung der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}_z$ im Undulator

$$\bar{v}_z = \frac{L}{T} = \frac{N \cdot \lambda_u}{T} = \frac{L}{\int_0^L dz/v_z}$$

Undulator Energie

Wellenlänge der Undulator Strahlung λ

relativistische Längenkontraktion von λ_u

$$\lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma^{*2}}(1+\gamma^{*2}\theta^2) \tag{4}$$

- v_z ist nicht konstant $\Rightarrow \gamma_* = \left(1 - \frac{v_z^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ variiert $\Rightarrow \lambda$ variiert
- Wie verändert sich γ^* ?
- Berechnung der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}_z$ im Undulator

$$\bar{v}_z = \frac{L}{T} = \frac{N \cdot \lambda_u}{T} = \frac{L}{\int_0^L dz/v_z}$$

Undulator Energie

Lösung:

$$\frac{\bar{v}_z}{c} = 1 - \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2} \Rightarrow \gamma^* := \frac{\gamma}{\sqrt{1 + K^2/2}}$$

Wellenlänge λ der Undulatorstrahlung:

$$\lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma^{*2}}(1 + \gamma^{*2}\theta^2) = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2}\left(1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2\theta^2\right) \tag{5}$$

- Wellenlängenänderung wird verursacht durch die Änderung von v_z, die sich aus der Energieerhaltung im Magnetfeld B ergibt
- B_u verursacht v_x (und v_y) Komponente

Undulator Bandbreite

- Wellenlänge direkt auf der Strahlachse

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma^{*2}}(1 + \gamma^{*2}\theta^2) \Rightarrow \lambda_0 = \frac{\lambda_u}{2\gamma^{*2}}$$

- Wellenlänge unter dem Winkel θ

$$\Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma^{*2}}\gamma^{*2}\theta^2$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \gamma^{*2}\theta^2$$

- Winkel θ_{cen} des zentralen Kerns der Undulatorstrahlung

$$\theta_{cen} = \frac{1}{\gamma^*\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{1 + K^2/2}}{\gamma\sqrt{N}}$$

Undulator Bandbreite

- Wellenlänge direkt auf der Strahlachse

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma^{*2}}(1 + \gamma^{*2}\theta^2) \Rightarrow \lambda_0 = \frac{\lambda_u}{2\gamma^{*2}}$$

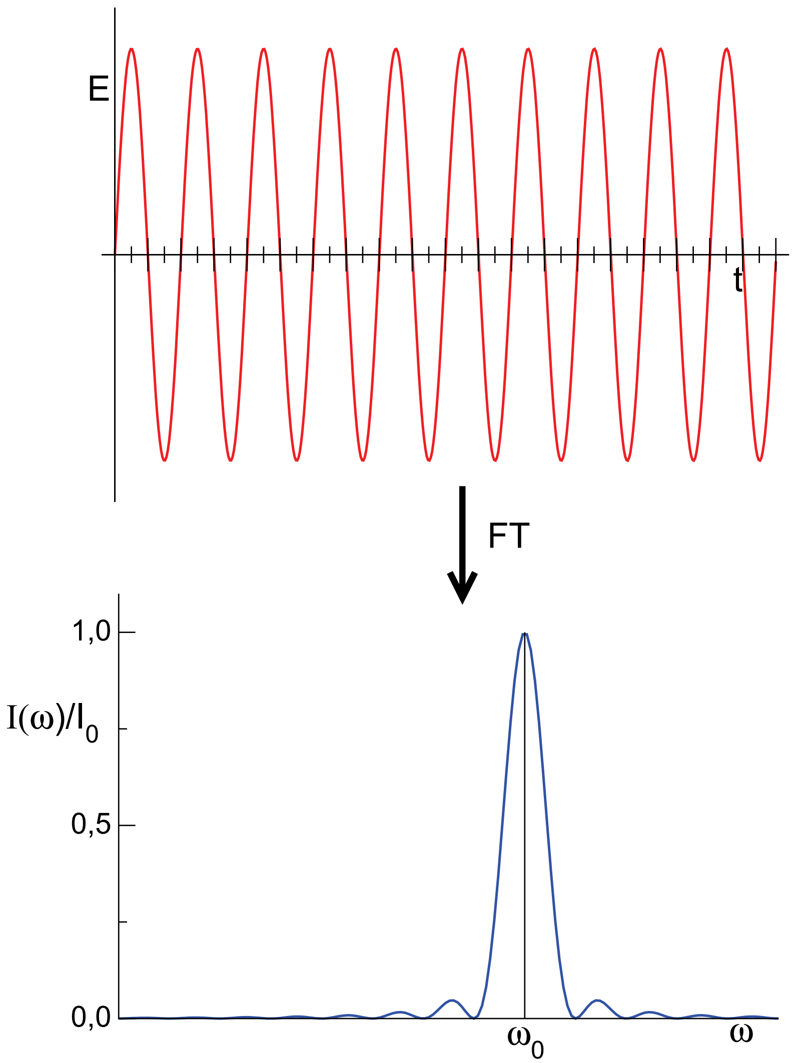
- Wellenlänge unter dem Winkel θ

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta\lambda &= \frac{\lambda_u}{2\gamma^{*2}}\gamma^{*2}\theta^2 \\ \Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} &= \gamma^{*2}\theta^2 \end{aligned}$$

- Winkel θ_{cen} des zentralen Kerns der Undulatorstrahlung

$$\theta_{cen} = \frac{1}{\gamma^*\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{1 + K^2/2}}{\gamma\sqrt{N}}$$

Undulator Bandbreite

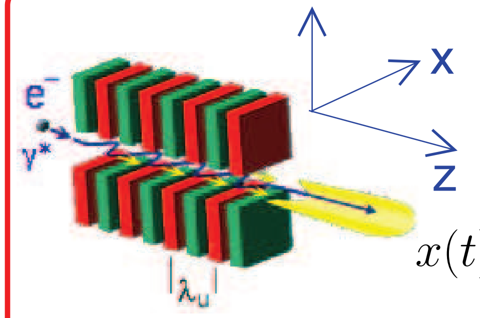


- In einem Undulator mit N Perioden oszilliert ein Elektron N mal und erzeugt somit einen entsprechenden Wellenzug. Die Fouriertransformierte dieses Wellenzuges ist eine $\sin x/x$ Funktion
- Undulator entspricht einem Interferometer mit N-facher Interferenz. Auflösung:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{N}$$

$$\frac{I(\omega)}{I_0} = \frac{\sin^2 N\pi\Delta\omega/\omega_0}{(N\pi\Delta\omega/\omega_0)^2}$$

Labor–System



x, z, t

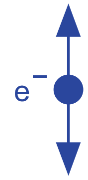
$$x(t) = -\frac{K}{k_u\gamma}\cos\omega_u t$$

$$v_x(t) = \frac{Kc}{\gamma}\sin\omega_u t$$

$$v_z(t) = \ldots$$

LT →

Elektronen–System

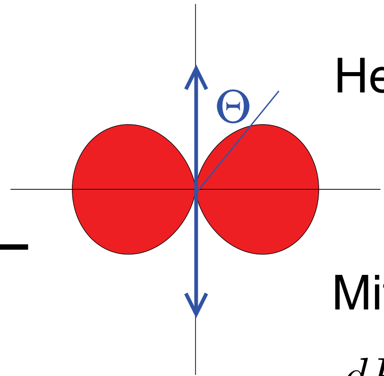


Elektron schwingt in dem mitbewegten System x', z', t'

$$x'(t) = -\frac{K}{k_u\gamma}\cos\omega'_u t'$$

$$a'_x(t) = \frac{K\omega'^2_u c}{k_u\gamma}\cos\omega'_u t' = \frac{2\pi c^2\gamma}{\lambda_u}\frac{K}{1+K^2/2}\cos\omega'_u t'$$

↓

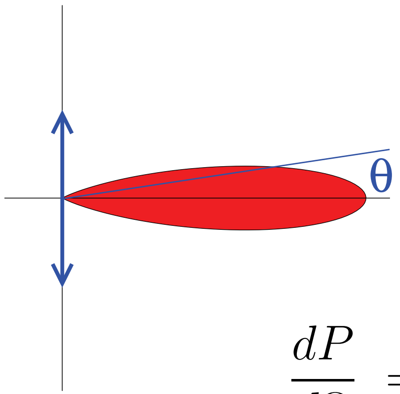


Hertz'scher Dipol

Mittlere Leistung

$$\frac{dP'}{d\Omega'} = \frac{e^2 a'^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\sin^2\Theta$$

← **LT**



$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{8\gamma^{*2}}{(1+\gamma^{*2}\theta^2)^3}\frac{dP'}{d\Omega'}$$

Undulator Strahlung

- Mittlere Leistung im Schwerpunktsystem

$$\frac{d\bar{P}'}{d\Omega'} = \frac{e^2 c\gamma^2}{8\epsilon_0\lambda_u^2}\frac{K^2}{(1+K^2/2)^2}\sin^2\Theta'$$

- Lorentz Transformation zurück in das Laborsystem

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{8\gamma^{*2}}{(1+\gamma^{*2}\theta^2)^3}\frac{dP'}{d\Omega'}$$

Ergebnis für ein einzelnes Elektron

$$\left.\frac{dP}{d\Omega}\right|_e = \frac{e^2 cK^2\gamma^4}{\epsilon_0\lambda_u^2(1+K^2/2)^3}\left(\frac{1+2\gamma^{*2}\theta^2(1-2\cos^2\phi)+\gamma^{*4}\theta^4}{(1+\gamma^{*2}\theta^2)^5}\right) \tag{6}$$

Undulator Strahlung

- Undulator:
  Inkohärente Überlagerung der Strahlung vieler Elektronen N_e

$$I = evn_l \approx \frac{ecN_e}{L} = \frac{ecN_e}{\lambda_u N} \Rightarrow N_e = \frac{I\lambda_u N}{ec}$$

- $$N_e = \frac{I\lambda_u N}{ec}, \qquad \frac{dP}{d\Omega} = N_e \cdot \left.\frac{dP}{d\Omega}\right|_e$$

- Strahlung eines Ensembles von N_e Elektronen ist somit

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{eN\gamma^4 I}{\epsilon_0 \lambda_u} \frac{K^2}{(1+K^2/2)^3} \left(\frac{1 + 2\gamma^{*2}\theta^2(1 - 2\cos^2\phi) + \gamma^{*4}\theta^4}{(1+\gamma^{*2}\theta^2)^5} \right)$$

$\Rightarrow$ Spektrale Leistungsdichte im Kern ist somit $\propto N^2$, da $E/\Delta E = N$ für Undulatoren mit $K \leq 1$.

Undulator

Vergleich der verschiedenen Quellen

Dipol:	P
Wiggler:	$N \cdot P$
Undulator:	$N^2 \cdot P$

Beim FEL werden wir sehen, daß für diesen dann

$$N^2 \cdot N_e^2$$

gilt

Brillianz

- Eine wichtige Größe zur Charakterisierung von Synchrotronstrahlung ist die Brillianz

$$B := \frac{\Delta P}{\Delta A \cdot \Delta\Omega}$$

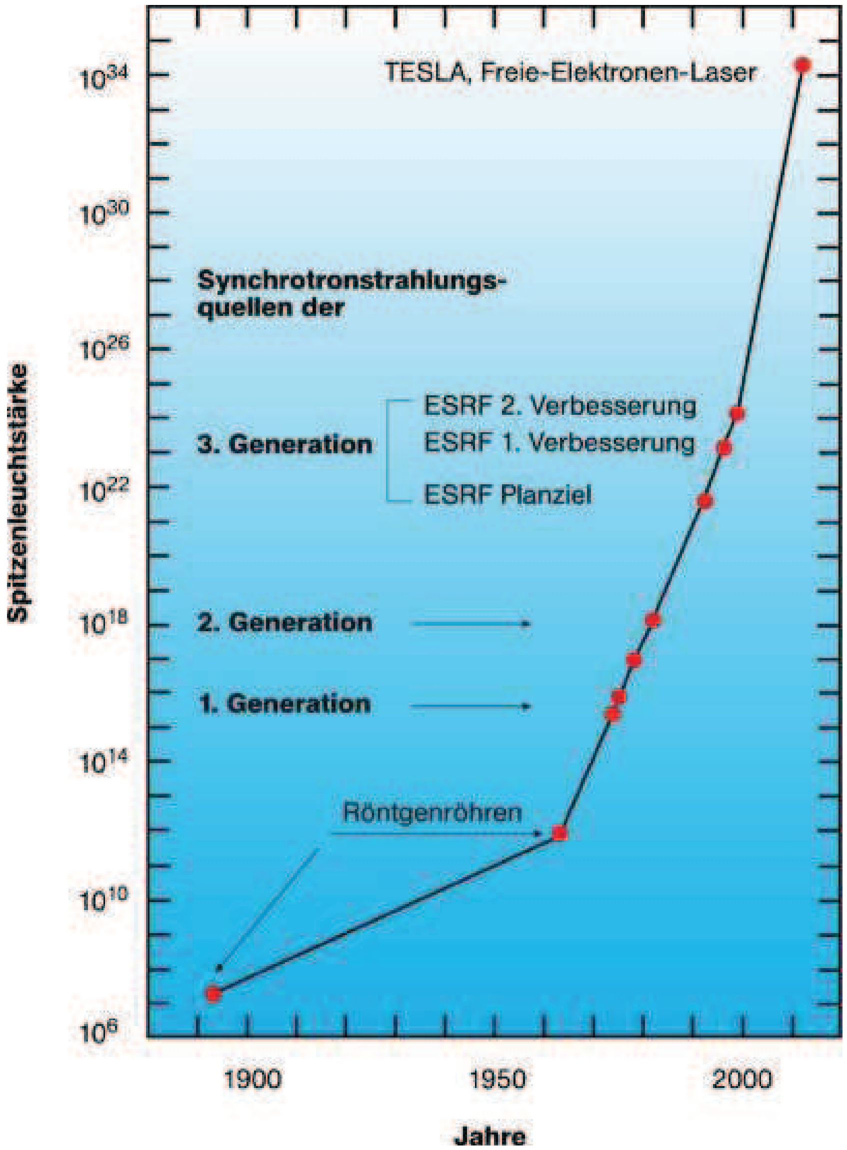
Spektrale Brillianz

$$B_{\Delta\omega/\omega} := \frac{\Delta P}{\Delta A \cdot \Delta\Omega \cdot \Delta\omega/\omega}$$

- Dichte der Photonen im transversalen Phasenraum
- Um eine möglichst hohe Photonendichte am Ort des Experimentes zu erreichen, muß die Brillianz so groß wie möglich sein
- Größtmöglich Brillianz $\rightarrow$ Laser
- Einheit

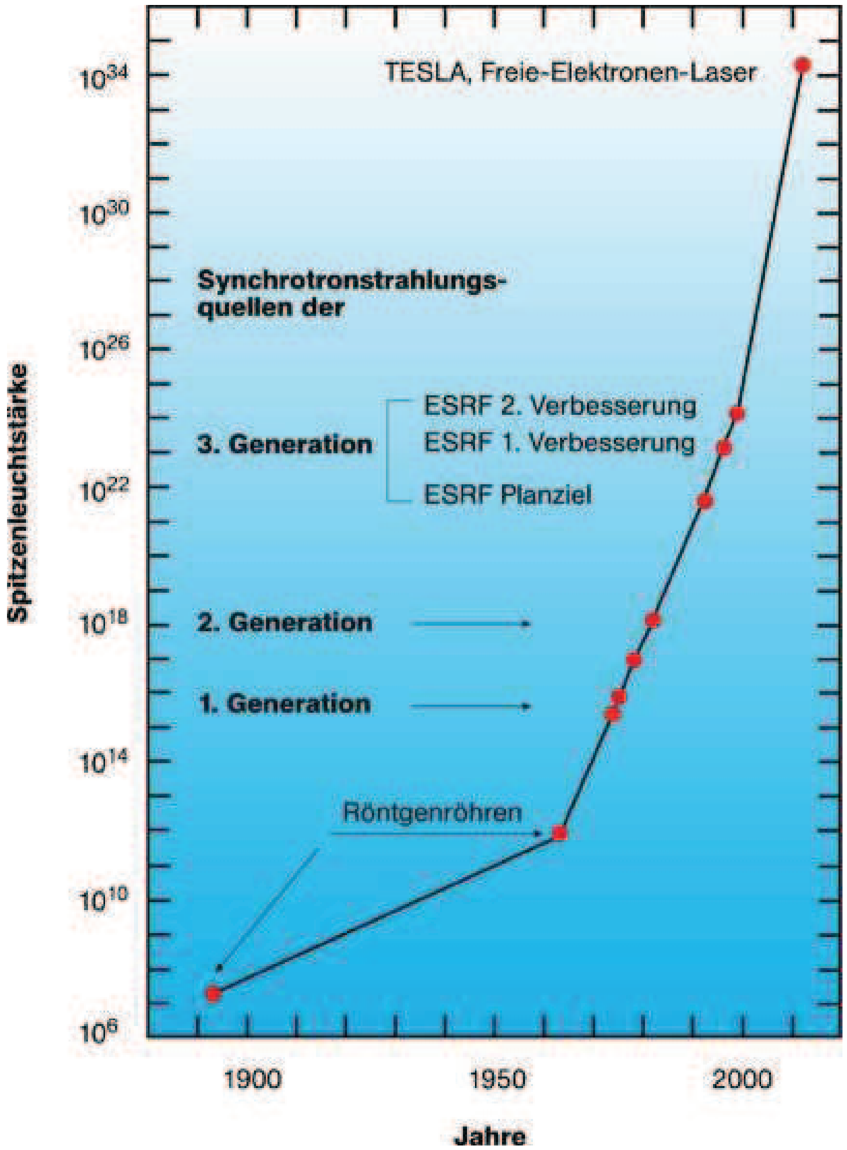
$$[B_{\Delta\omega/\omega}] = \frac{Photonen}{s \cdot mm^2 \cdot mrad^2 \cdot 0.1\%\mathrm{BW}}$$

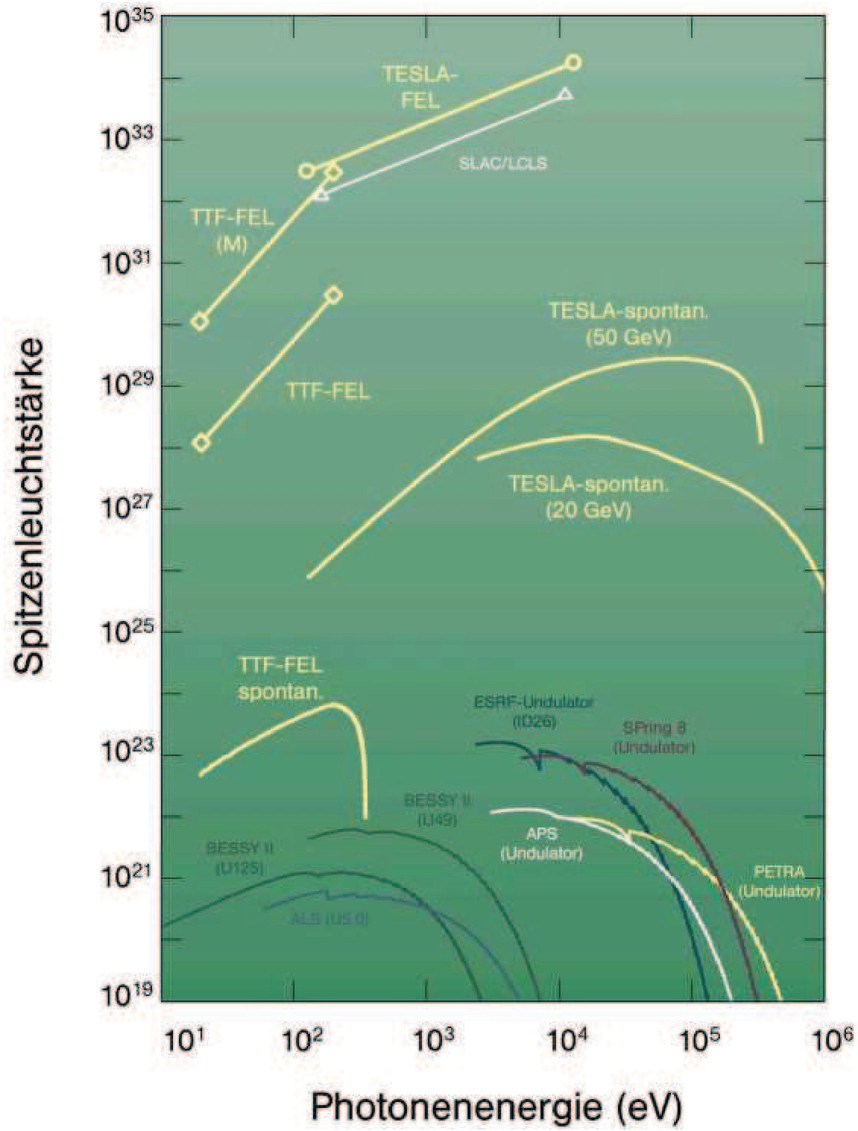
Brillianz



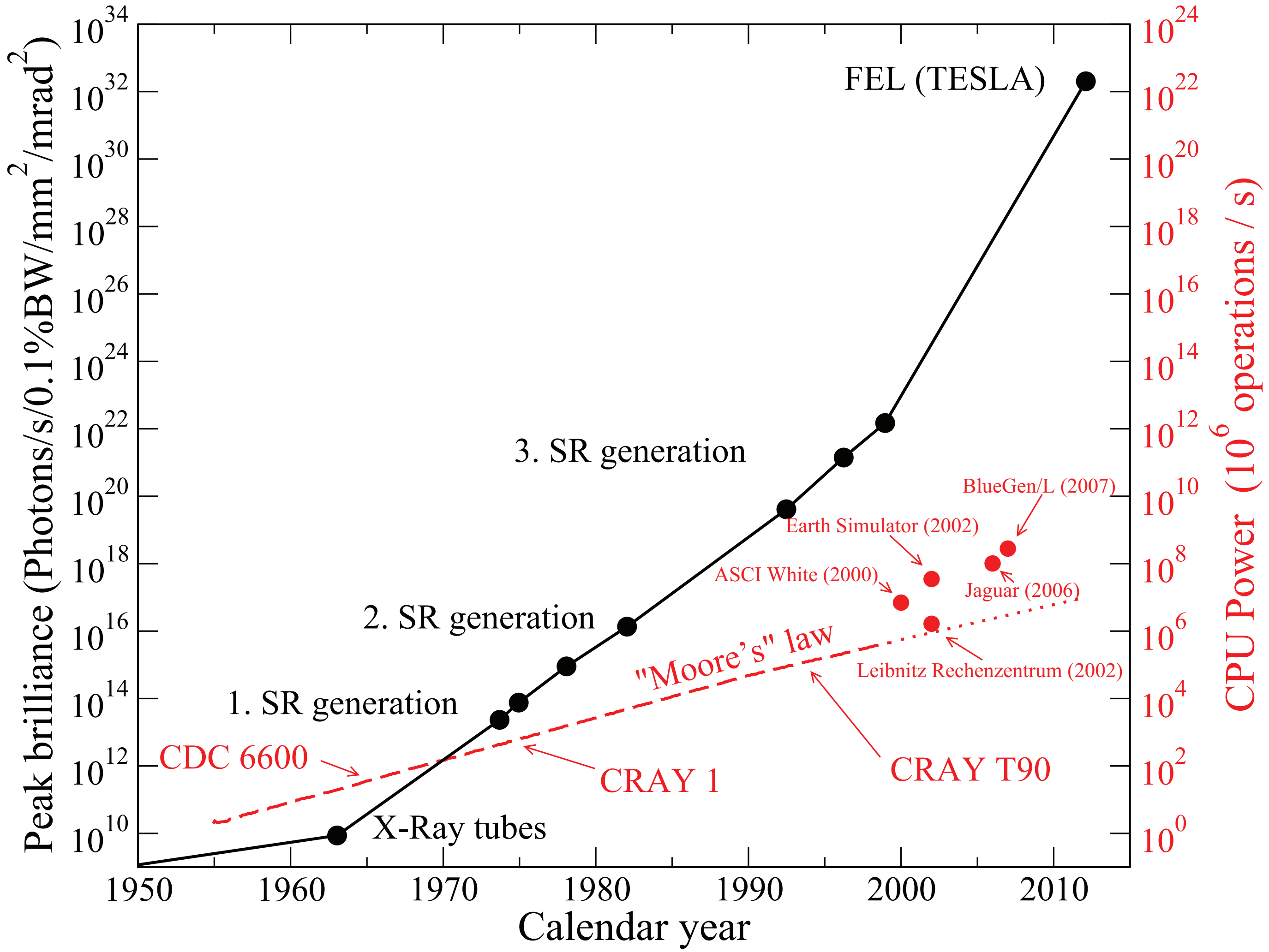
- Entwicklung der Brillianz verschiedener Röntgenquellen mit der Zeit

Brillianz


TESLA, Freie-Elektronen-Laser
Synchrotronstrahlungs-quellen der
3. Generation
ESRF 2. Verbesserung
ESRF 1. Verbesserung
ESRF Planziel
2. Generation
1. Generation
Röntgenröhren
Spitzenleuchtstärke
Jahre
1900
1950
2000
10^{6}
10^{10}
10^{14}
10^{18}
10^{22}
10^{26}
10^{30}
10^{34}

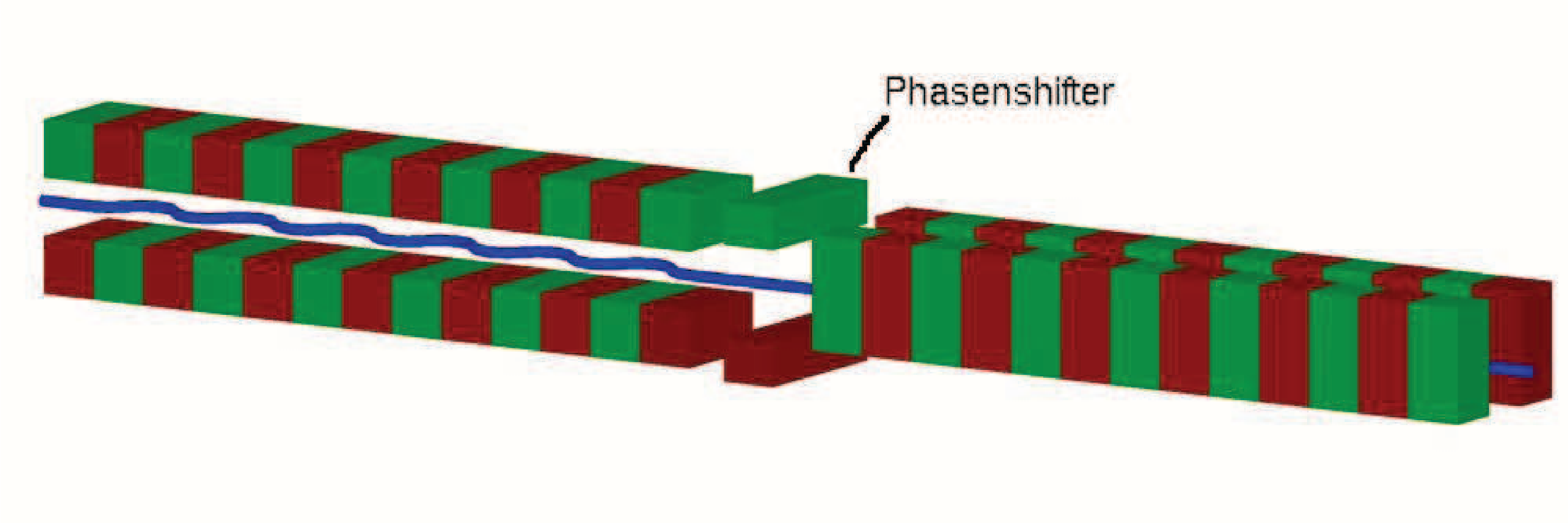

TESLA-FEL
SLAC/LCLS
TTF-FEL (M)
TTF-FEL
TESLA-spontan. (50 GeV)
TESLA-spontan. (20 GeV)
TTF-FEL spontan.
ESRF-Undulator (ID26)
SPring 8 (Undulator)
BESSY II (U49)
APS (Undulator)
BESSY II (U125)
PETRA (Undulator)
Spitzenleuchtstärke
Photonenenergie (eV)
10^{19}
10^{21}
10^{23}
10^{25}
10^{27}
10^{29}
10^{31}
10^{33}
10^{35}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
10^{5}
10^{6}

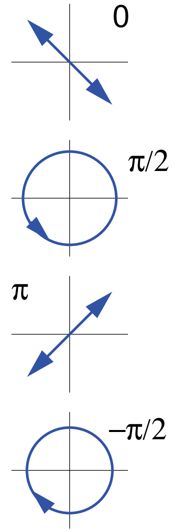
Brillianz


Peak brilliance (Photons/s/0.1%BW/mm²/mrad²)
CPU Power (10⁶ operations / s)
Calendar year
1950
1960
1970
1980
1990
2000
2010
FEL (TESLA)
3. SR generation
2. SR generation
1. SR generation
X-Ray tubes
BlueGen/L (2007)
Earth Simulator (2002)
ASCI White (2000)
Jaguar (2006)
Leibnitz Rechenzentrum (2002)
"Moore's" law
CDC 6600
CRAY 1
CRAY T90

Undulator Polarisation

- Undulator Strahlung ist linear polarisiert.
- Erzeugung zirkular polarisierter Strahlung



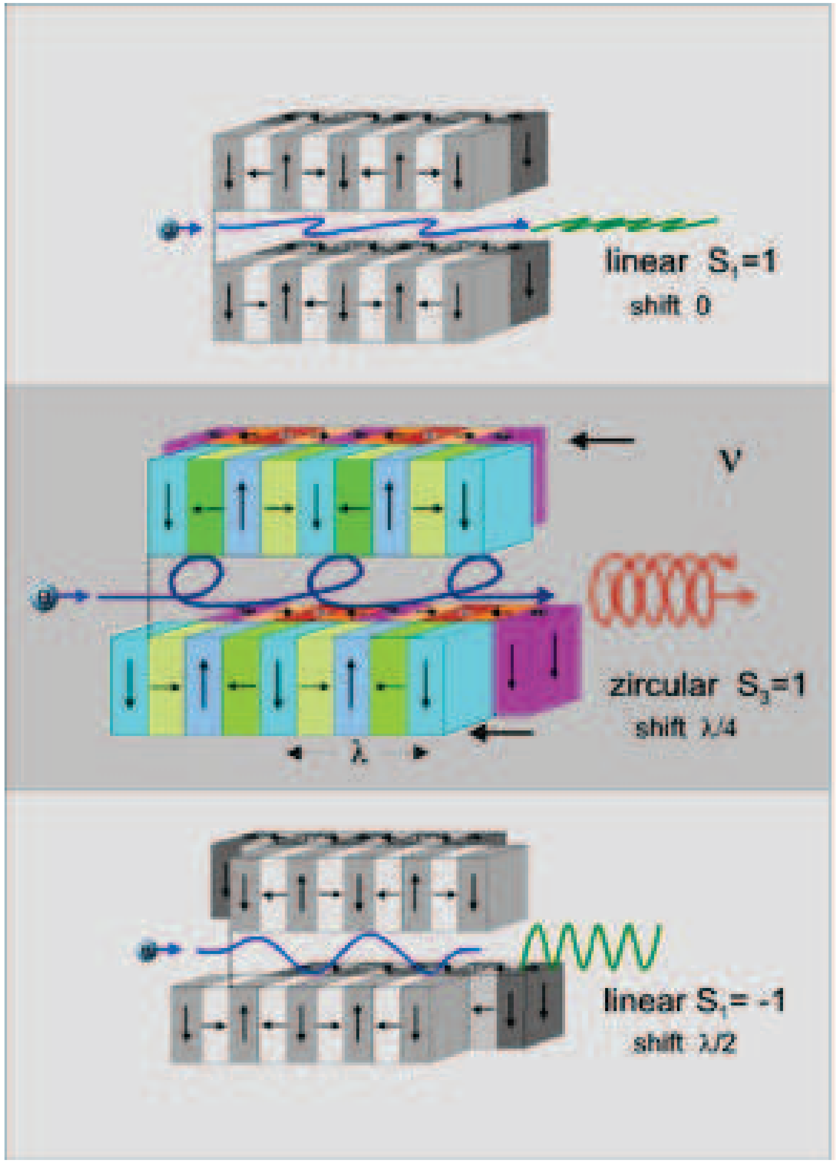


- Gekreuzte Undulatoren
- Die senkrecht zueinander polarisierte Strahlung der beiden Teil-Undulatoren kann durch eine Variation der Phase von Elektronenstrahl und Licht zu elliptisch polarisiertem Licht addiert werden.

Undulator Polarisation

- Undulator Strahlung ist linear polarisiert.
- Sasaki-Type Undulator (Helicale undulator)
  "Aufschneiden" eines Undulators der Länge nach und verschieben der Komponenten gegeneinander.
- Magnetfeld
$$\vec{B}_u = \vec{e}_x B_u \cos k_u z - \vec{e}_y B_u \sin k_u z$$
- Elektronen bewegen sich dann auf einer Spiralbahn (Helix) durch den Undulator und erzeugen direkt ellipisch polarisiertes Licht (EPU – Elliptical polarised undulator)
- v_z-Komponente bleibt bei einer rein zirkularen Bahn konstant!

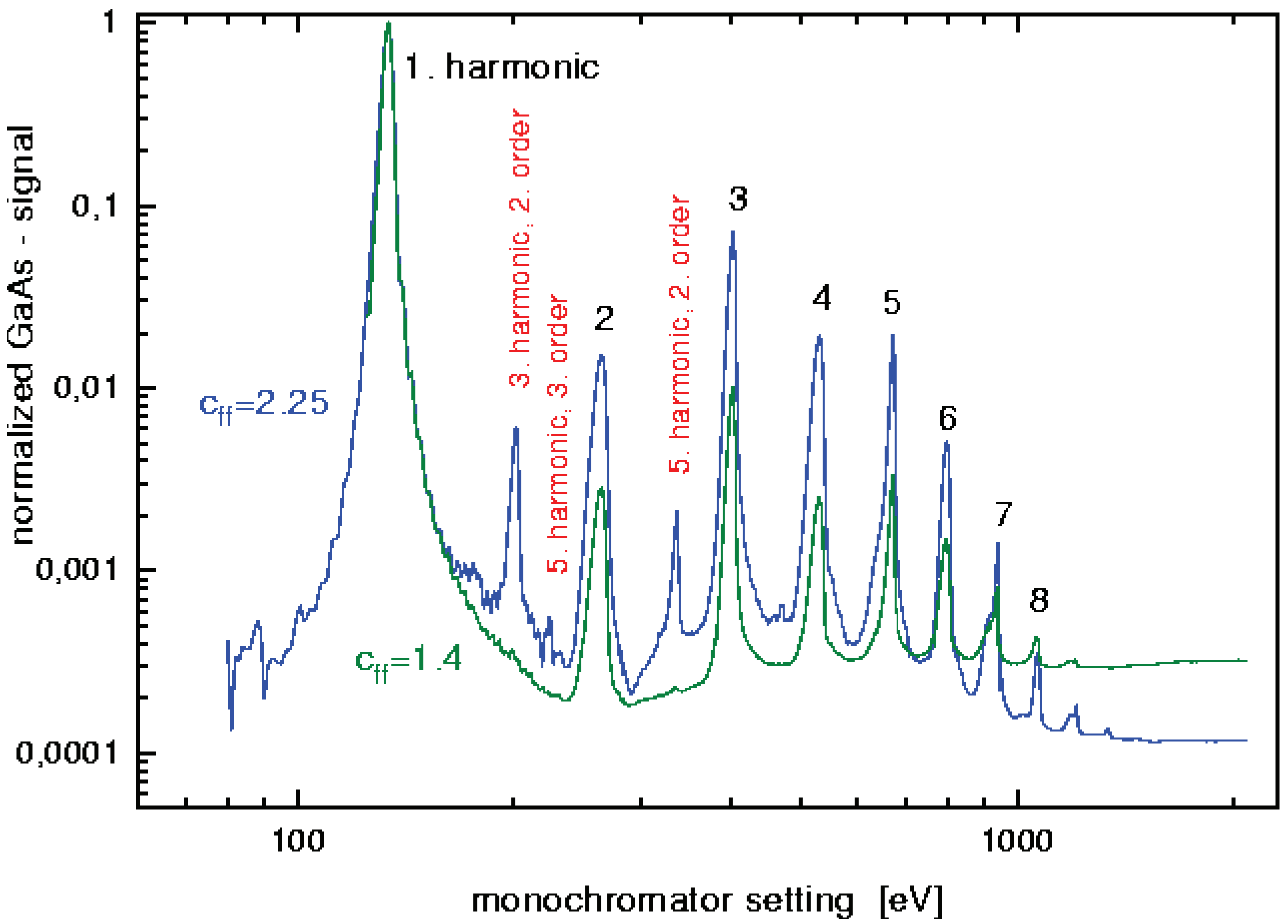
Undulator Polarisation



Sasaki Undulator

Durch schieben der Magneten-strukturen gegeneinander können fast beliebige Polarisationen erzeugt werden.

Undulator Harmonische



- Neben der Fundamentalen werden auch höhere Harmonische der Undulatorstrahlung beobachtet
- Gerade Harmonische habe eine andere Charakteristik
- Warum ?

Undulator Harmonische

- Früheres Ergebnis für die Geschwindigkeiten:

$$
\begin{aligned}
v_z &= c\left(1 - \frac{1+K^2/2}{2\gamma^2} - \frac{K^2}{4\gamma^2}\cos 2k_u z\right) \\
v_x &= \frac{cK}{\gamma}\sin k_u z
\end{aligned}
$$

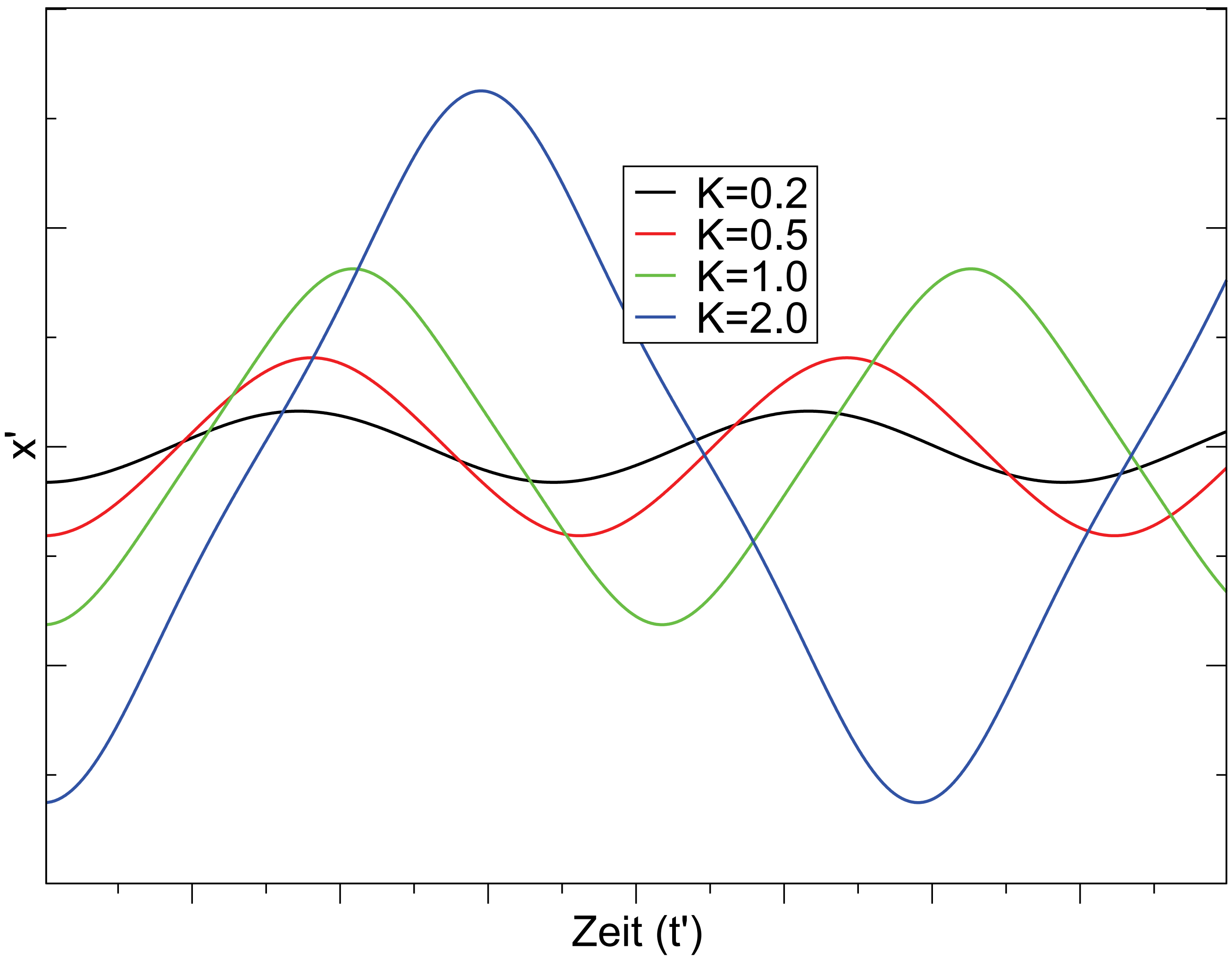
- Integration und Transformation in das x', z', t'-System

$$
\begin{aligned}
z'(t') &= \frac{K^{*2}}{8k'_u}\sin(w\omega'_u t' + 2k'_u z') \\
x'(t') &= -\frac{K^*}{k'_u}\left(\cos\omega'_u t' \cos(K^{*2}/8\sin 2\omega'_u t') - \sin\omega'_u t' \sin(K^{*2}/8 \text{ si}\right.
\end{aligned}
$$

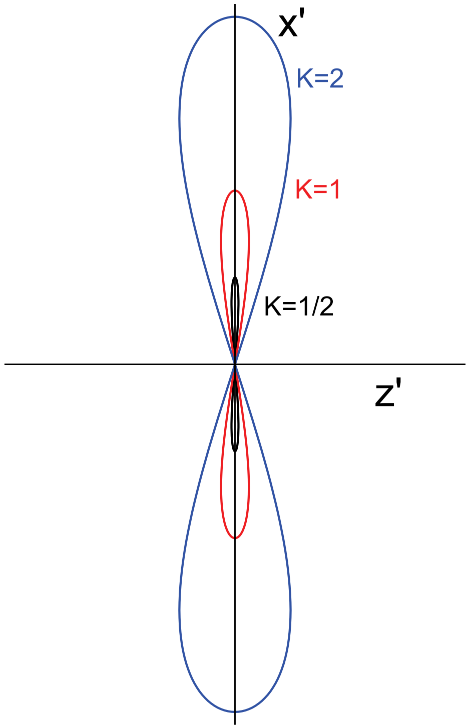
$$
K^* = \frac{K}{\sqrt{1+K^2/2}}, k'_u = \gamma^* \cdot k_u, \omega'_u = \gamma^* \cdot \omega_U, \gamma^* = \frac{\gamma}{\sqrt{1+K^2/2}}
$$

- Anharmonische Bewegung für große K

Undulator Harmonische



Undulator Harmonische



- Früheres Ergebnis für die Geschwindigkeiten in einem planaren Undulator:

$$v_z = c\left(1 - \frac{1+K^2/2}{2\gamma^2} - \frac{K^2}{4\gamma^2}\cos 2k_u z\right)$$

$$v_x = \frac{cK}{\gamma}\sin k_u z$$

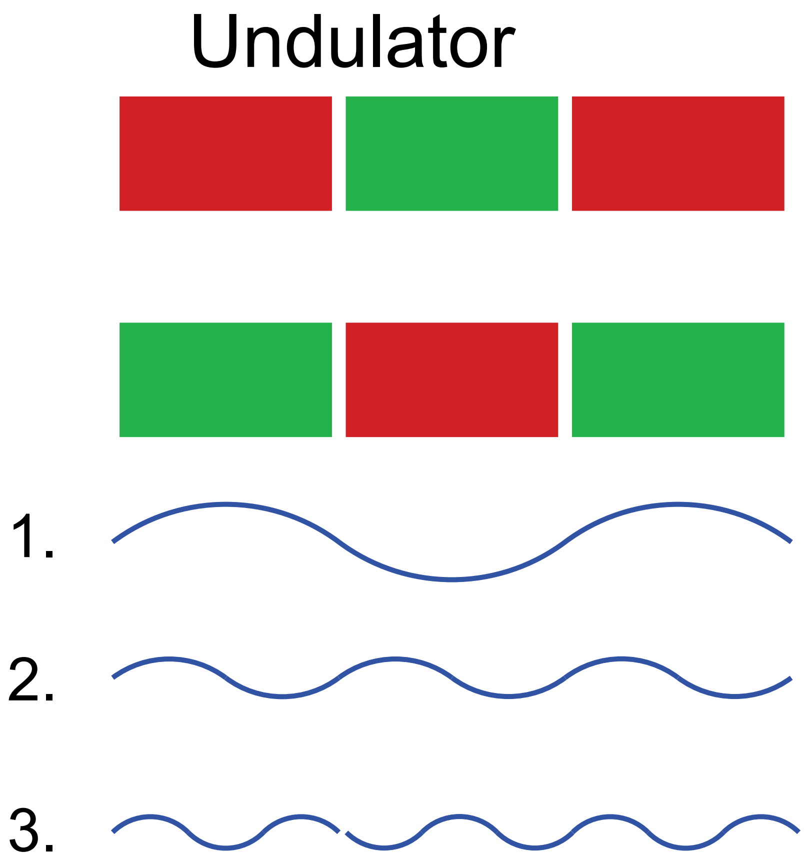
- Beschränkung auf die Bewegung in den kleinsten Harmonischen

$$\frac{x'(t')}{\lambda'_u} = -\frac{K}{2\pi}\cos\omega'_u t'$$

$$\frac{z'(t')}{\lambda'_u} = -\frac{K^2}{16\pi}\sin 2\omega'_u t'$$

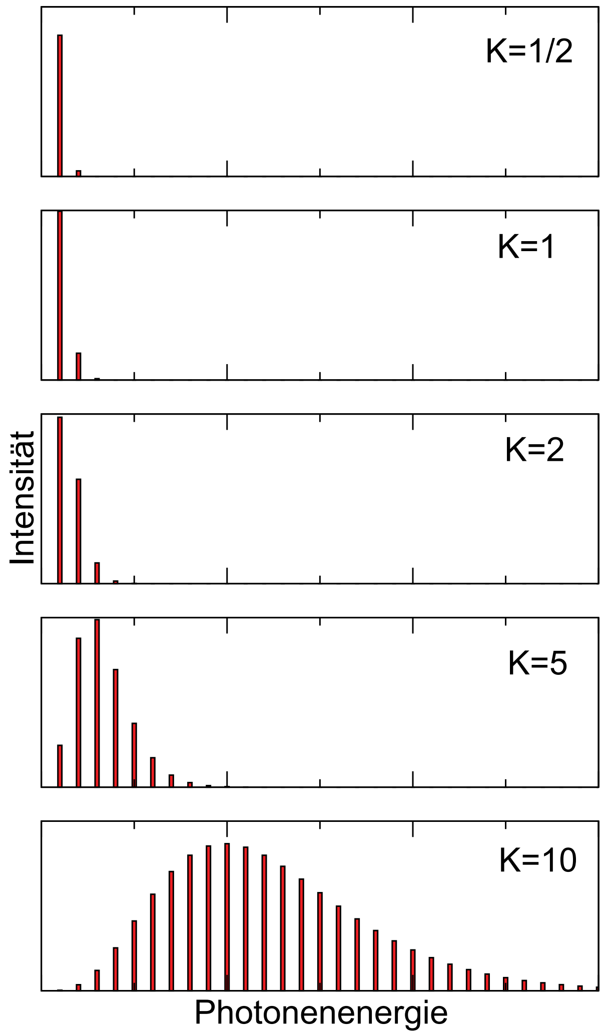
Im x', z', t'-System entspricht diese Bewegung einer 8

Undulator Harmonische



- Gerade Ordnungen sind nicht in der richtigen Phase mit dem Undulator Feld
- Keine geraden Ordnungen in der x'-Richtung
- Eine EPU erzeugt keine höheren Ordnungen, da die v_z-Komponente konstant ist

Undulator – Wiggler



- Übergang vom Undulator zum Wigglerspektrum
- Abgestrahlte Leistung in den höheren Harmonischen

$$\frac{dP'}{d\Omega'} \propto n^4 K^{*2n}$$

- Starke Zunahme der Intensität in den höheren Ordnungen für großes K

Take Home Message – Insertion Devices

- Insertion Devices sind Multipol-Magnetstruktur die in gerade Segmente eines Speicherringes eingebaut werden.
- Durch Kohärente Überlagerung der SR eines Elektrons wird die Strahlung um den Faktor N^2 intensiver.
- Ein Undulator Spektrum besteht aus verschiedenen Harmonischen mit Breite $E/\Delta E \approx N$.
- Die Wellenlänge der 1. Harmonischen ergibt sich aus der Lorentz-Transformation der Undulatorwellenlänge.
- Die Wellenlänge der Undulatorstrahlung kann durch Variation des Gap's geändert werden.