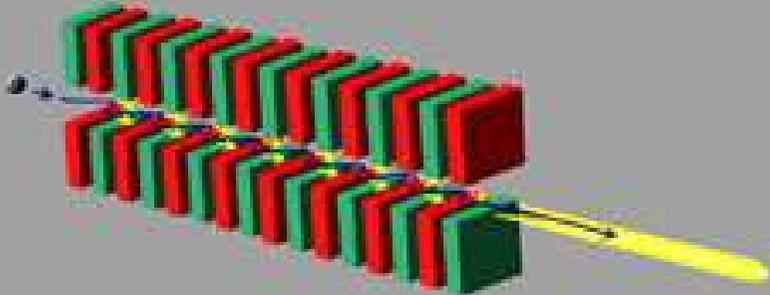
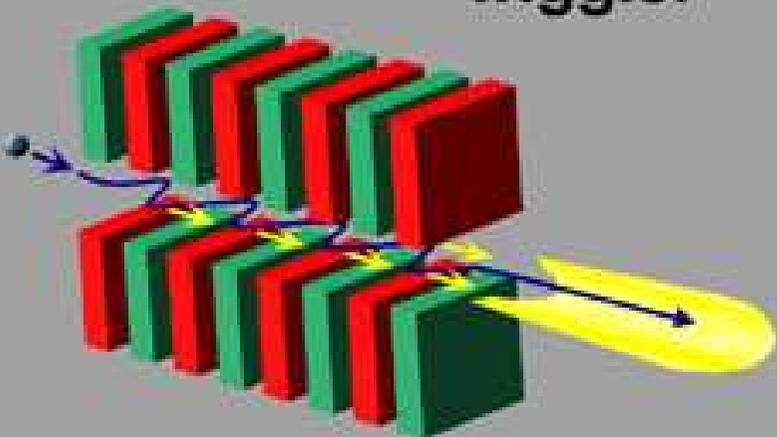


undulator



wiggler



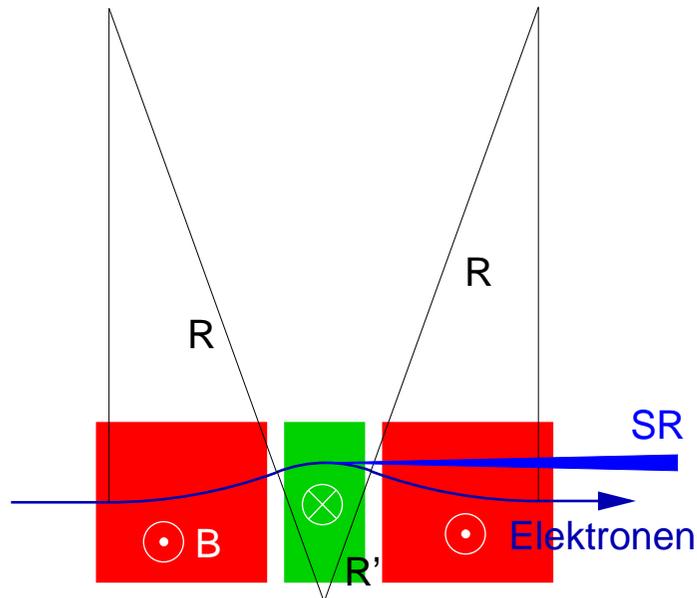
Insertion Devices

- Wavelength-Shifter
- Das Wiggler/Undulator Feld
- Bewegungsgleichung
- Undulator Strahlung
- Eigenschaften
- Polarisation

Wellenlängenschieber

- In einem Speicherring gilt für die kritische Energie

$$E_c \propto 1/R$$



- R : Radius in den Dipolmagneten
 R kann nicht einfach verändert werden
- In einer einfachen 3-Pol Struktur kann der Ablenkradius in einem Segment durch ein entsprechend starkes Magnetfeld \vec{B} der effektive Radius R' verkleinert werden

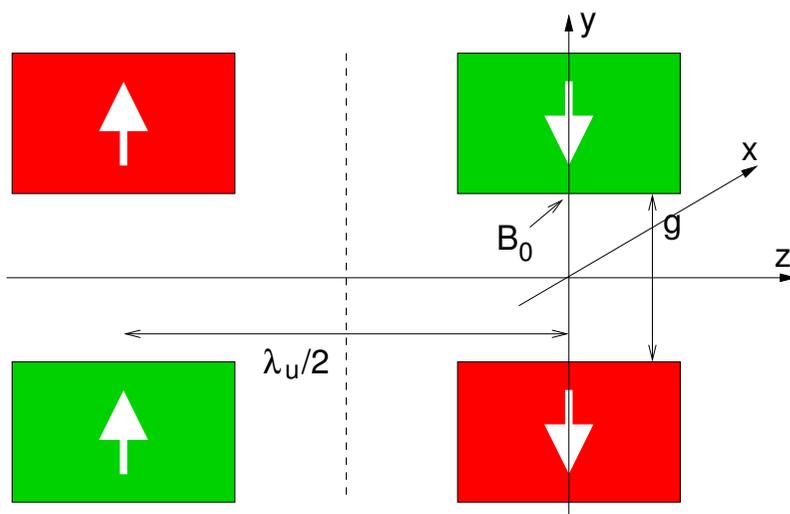
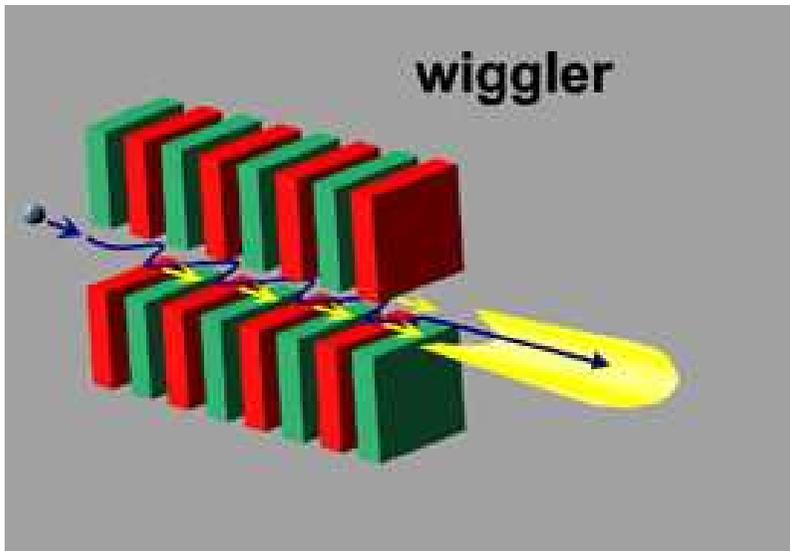
⇒ Höhere Photonenenergien sind möglich

- Abstrahlcharakteristik wie ein Dipol
- Um entsprechend hohe Magnetfelder von einigen Tesla erreichen zu können sind **supraleitende Magnete** erforderlich

Wiggler

Periodische Magnetfeldanordnung mit der Periode λ_u und N Polen

- Potential entlang der Strahlachse



$$\phi(z, y) = f(y) \cos \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 \phi(z, y) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 f(y)}{dy^2} - f(y) \left(\frac{2\pi}{\lambda_u} \right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow f(y) = A \cdot \sinh\left(\frac{2\pi}{\lambda_u} y\right)$$

$$\text{mit } A = \frac{B_0}{\frac{2\pi}{\lambda_u} \cosh\left(\pi \frac{g}{\lambda_u}\right)}$$

Wiggler / Undulator Feld

- B -Feld Komponente auf der Achse

$$B_y(z, y) = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{2\pi}{\lambda_u} A \cosh \frac{2\pi}{\lambda_u} y \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

- Strahlachse $y = 0$

$$\bar{B} = \frac{B_0}{\cosh \pi \frac{g}{\lambda_u}}$$

$$B_y(z) = \bar{B} \cos \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

- Durch Variation des Polabstandes g (Gap) kann das Magnetfeld $B_y(z)$ auf der Strahlachse definiert variiert werden
- Realisierung von Wigglern / Undulatoren
 - Großes λ_u ($> 20 \text{ cm}$): Elektromagnete, g fest
 - Kleines λ_u : Permanentmagnete, g variable ($g \geq 15 \text{ mm}$)

Undulatoren

- Frequenz der emittierten Strahlung (in 0. Ordnung):
relativistische Längenkontraktion der Period λ_u



Undulator Bewegungsgleichung

- Bewegung im Undulatorfeld

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

- Annahmen

- Im Wiggler/Undulator ist $\vec{E} \approx 0$, was sich im Fall von langen Undulatoren (FEL) ändert!
- $\vec{v} \approx v_z \vec{e}_z$

- Bewegung in x-Richtung

$$\begin{aligned} m_0 \gamma \frac{dv_x}{dt} &= ev_z B_y(z) \\ &= e \frac{dz}{dt} \bar{B} \cos \frac{2\pi}{\lambda_u} z \end{aligned}$$

- Integration

Undulator

Bewegung in x -Richtung

$$m_0 \gamma v_x = \frac{e \bar{B} \lambda_u}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

Beachte:

z ist nicht linear in der Zeit, da v_z selbst von t abhängt. Die Bewegung in x Richtung ist also keine reine harmonische Schwingung \Rightarrow Höhere Harmonische

Undulator Parameter

- Bewegung in x-Richtung

$$m_0 \gamma v_x = \frac{e \bar{B} \lambda_u}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

$$\Rightarrow v_x = \frac{e \bar{B} \lambda_u c}{2\pi m_0 \gamma c} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

$$v_x = \frac{K c}{\gamma} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

$$\text{mit } K := \frac{e \bar{B} \lambda_u}{2\pi m_0 c}$$

Undulator Parameter K

- $v_z \approx c \Rightarrow$

$$\tan \theta_e(z) \approx \theta_e(z) = \frac{v_x}{v_z} \approx \frac{K}{\gamma} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z \Rightarrow |\theta_{e,max}| \approx \frac{K}{\gamma}$$

Undulator Parameter

- Bewegung in x-Richtung

$$m_0 \gamma v_x = \frac{e \bar{B} \lambda_u}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

$$\Rightarrow v_x = \frac{e \bar{B} \lambda_u c}{2\pi m_0 \gamma c} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

$$v_x = \frac{K c}{\gamma} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

$$\text{mit } K := \frac{e \bar{B} \lambda_u}{2\pi m_0 c}$$

Undulator Parameter K

- $v_z \approx c \Rightarrow$

$$\tan \theta_e(z) \approx \theta_e(z) = \frac{v_x}{v_z} \approx \frac{K}{\gamma} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z \Rightarrow |\theta_{e,max}| \approx \frac{K}{\gamma}$$

Undulator Parameter

Charakteristischer Abstrahlwinkel der SR: $\theta = 1/\gamma$, $\theta_e = K/\gamma$

$K \leq 1$ Undulator

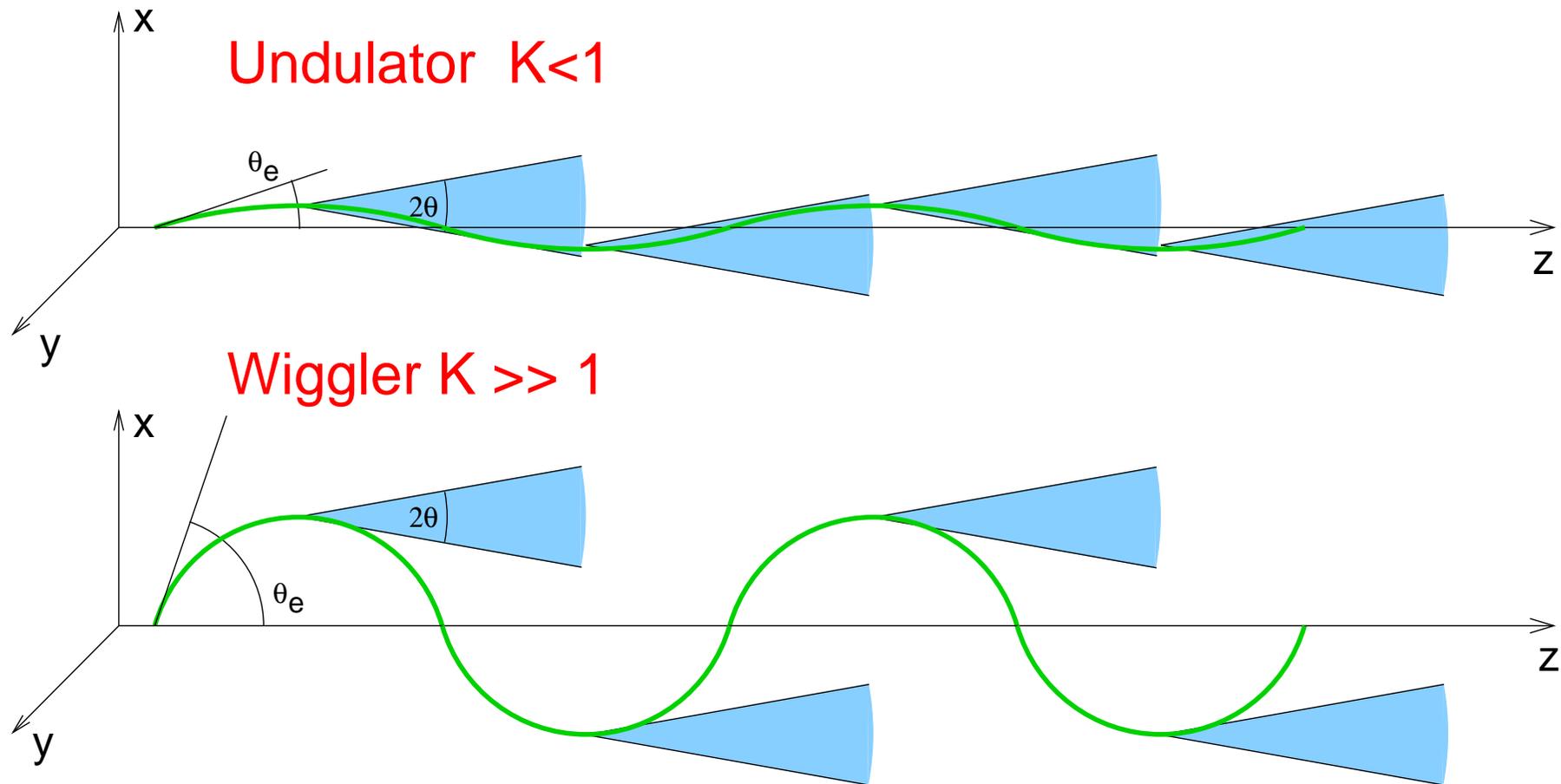
Abstrahlkegel der einzelnen Magnetpole überlappen \rightarrow **kohärente** Überlagerung \rightarrow Interferenzeffekte

$K \gg 1$ Wiggler

Abstrahlkegel der einzelnen Magnetpole überlappen nicht \rightarrow **Nicht kohärente** Überlagerung \rightarrow Emittierte Strahlung entspricht weitgehend der eines Dipols, aber mit $2 \cdot N$ facher Intensität.

Verschiebung der kritischen Energie E_c abhängig von \bar{B} .

Undulator Parameter



Undulator: z-Richtung

- Energie ist im B -Feld konstant $\Rightarrow \gamma = \text{const.}$

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{v_x^2 + v_z^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{v_z^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} - \frac{v_x^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} - \frac{K^2}{\gamma^2} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

- $K/\gamma \ll 1$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$:

$$\frac{v_z}{c} = 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{K^2}{2\gamma^2} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

$$= 1 - \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2} + \frac{K^2}{4\gamma^2} \cos 2\frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

$$\frac{v_x}{c} = \frac{K}{\gamma} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

Undulator: z-Richtung

- Energie ist im B -Feld konstant $\Rightarrow \gamma = \text{const.}$

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{v_x^2 + v_z^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{v_z^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} - \frac{v_x^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} - \frac{K^2}{\gamma^2} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

- $K/\gamma \ll 1$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$:

$$\frac{v_z}{c} = 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{K^2}{2\gamma^2} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

$$= 1 - \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2} + \frac{K^2}{4\gamma^2} \cos 2\frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

$$\frac{v_x}{c} = \frac{K}{\gamma} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

Undulator: z-Richtung

- Energie ist im B -Feld konstant $\Rightarrow \gamma = \text{const.}$

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{v_x^2 + v_z^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{v_z^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} - \frac{v_x^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} - \frac{K^2}{\gamma^2} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

- $K/\gamma \ll 1$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$:

$$\frac{v_z}{c} = 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{K^2}{2\gamma^2} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

$$= 1 - \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2} + \frac{K^2}{4\gamma^2} \cos 2\frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

$$\frac{v_x}{c} = \frac{K}{\gamma} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

Undulator: z-Richtung

- Oszillation in z-Richtung mit der doppelten Frequenz

$$\frac{v_z}{c} = 1 - \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2} + \frac{K^2}{4\gamma^2} \cos 2\frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

$$\frac{v_x}{c} = \frac{K}{\gamma} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_u} z \approx \frac{2\pi}{\lambda_u} v_z t \approx \frac{2\pi}{\lambda_u} ct \approx 2\pi\nu_u t \approx \omega_u t$$

Undulator Energie

Wellenlänge der Undulator Strahlung λ

relativistische Längenkontraktion von λ_u

$$\lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma^{*2}} (1 + \gamma^{*2}\theta^2) \quad (4)$$

- v_z ist nicht konstant $\Rightarrow \gamma_* = \left(1 - \frac{v_z^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ variiert $\Rightarrow \lambda$ variiert
- Wie verändert sich γ^* ?
- Berechnung der mittleren Geschwindigkeit \bar{v}_z im Undulator

$$\bar{v}_z = \frac{L}{T} = \frac{N \cdot \lambda_u}{T} = \frac{L}{\int_0^L dz / v_z}$$

Undulator Energie

Wellenlänge der Undulator Strahlung λ

relativistische Längenkontraktion von λ_u

$$\lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma^{*2}} (1 + \gamma^{*2}\theta^2) \quad (4)$$

- v_z ist nicht konstant $\Rightarrow \gamma_* = \left(1 - \frac{v_z^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ variiert $\Rightarrow \lambda$ variiert
- Wie verändert sich γ^* ?
- Berechnung der mittleren Geschwindigkeit \bar{v}_z im Undulator

$$\bar{v}_z = \frac{L}{T} = \frac{N \cdot \lambda_u}{T} = \frac{L}{\int_0^L dz / v_z}$$

Undulator Energie

Lösung:

$$\frac{\bar{v}_z}{c} = 1 - \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2} \Rightarrow \gamma^* := \frac{\gamma}{\sqrt{1 + K^2/2}}$$

Wellenlänge λ der Undulatorstrahlung:

$$\lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma^{*2}} (1 + \gamma^{*2}\theta^2) = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2\theta^2 \right) \quad (5)$$

- Wellenlängenänderung wird verursacht durch die Änderung von v_z , die sich aus der Energieerhaltung im Magnetfeld B ergibt
- B_u verursacht v_x (und v_y) Komponente

Undulator Bandbreite

- Wellenlänge direkt auf der Strahlachse

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma^{*2}}(1 + \gamma^{*2}\theta^2) \Rightarrow \lambda_0 = \frac{\lambda_u}{2\gamma^{*2}}$$

- Wellenlänge unter dem Winkel θ

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta\lambda &= \frac{\lambda_u}{2\gamma^{*2}}\gamma^{*2}\theta^2 \\ \Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} &= \gamma^{*2}\theta^2 \end{aligned}$$

- Winkel θ_{cen} des zentralen Kerns der Undulatorstrahlung

$$\theta_{cen} = \frac{1}{\gamma^*\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{1 + K^2/2}}{\gamma\sqrt{N}}$$

Undulator Bandbreite

- Wellenlänge direkt auf der Strahlachse

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma^{*2}}(1 + \gamma^{*2}\theta^2) \Rightarrow \lambda_0 = \frac{\lambda_u}{2\gamma^{*2}}$$

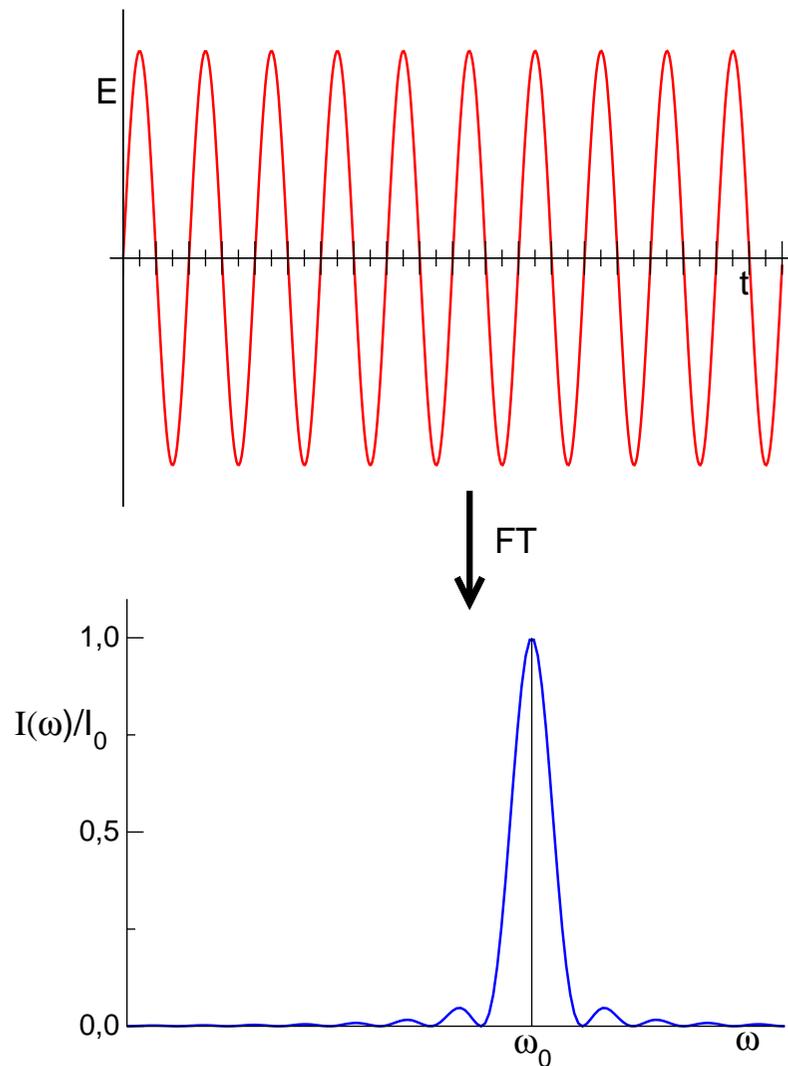
- Wellenlänge unter dem Winkel θ

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta\lambda &= \frac{\lambda_u}{2\gamma^{*2}}\gamma^{*2}\theta^2 \\ \Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} &= \gamma^{*2}\theta^2 \end{aligned}$$

- Winkel θ_{cen} des zentralen Kerns der Undulatorstrahlung

$$\theta_{cen} = \frac{1}{\gamma^*\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{1 + K^2/2}}{\gamma\sqrt{N}}$$

Undulator Bandbreite



- In einem Undulator mit N Perioden oszilliert ein Elektron N mal und erzeugt somit einen entsprechenden Wellenzug. Die Fouriertransformierte dieses Wellenzuges ist eine $\sin x/x$ Funktion
- Undulator entspricht einem Interferometer mit N -facher Interferenz. Auflösung:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{N}$$

$$\frac{I(\omega)}{I_0} = \frac{\sin^2 N\pi\Delta\omega/\omega_0}{(N\pi\Delta\omega/\omega_0)^2}$$

Labor-System

Elektronen-System

$x(t) = -\frac{K}{k_u \gamma} \cos \omega_u t$
 $v_x(t) = \frac{Kc}{\gamma} \sin \omega_u t$
 $v_z(t) = \dots$

x, z, t

LT

Elektron schwingt in dem mitbewegten System x', z', t'

$x'(t) = -\frac{K}{k_u \gamma} \cos \omega'_u t'$
 $a'_x(t) = \frac{K \omega'^2_u c}{k_u \gamma} \cos \omega'_u t'$
 $= \frac{2\pi c^2 \gamma}{\lambda_u} \frac{K}{1 + K^2/2} \cos \omega'_u t'$

↓

$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{8\gamma^{*2}}{(1 + \gamma^{*2}\theta^2)^3} \frac{dP'}{d\Omega'}$

LT

Hertz'scher Dipol

Mittlere Leistung

$\frac{dP'}{d\Omega'} = \frac{e^2 a'^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \Theta$

Undulator Strahlung

- Mittlere Leistung im Schwerpunktsystem

$$\frac{d\bar{P}'}{d\Omega'} = \frac{e^2 c \gamma^2}{8 \epsilon_0 \lambda_u^2} \frac{K^2}{(1 + K^2/2)^2} \sin^2 \Theta'$$

- Lorentz Transformation zurück in das Laborsystem

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{8\gamma^{*2}}{(1 + \gamma^{*2}\theta^2)^3} \frac{dP'}{d\Omega'}$$

Ergebnis für ein einzelnes Elektron

$$\left. \frac{dP}{d\Omega} \right|_e = \frac{e^2 c K^2 \gamma^4}{\epsilon_0 \lambda_u^2 (1 + K^2/2)^3} \left(\frac{1 + 2\gamma^{*2}\theta^2(1 - 2\cos^2\phi) + \gamma^{*4}\theta^4}{(1 + \gamma^{*2}\theta^2)^5} \right) \quad (6)$$

Undulator Strahlung

- Undulator:
Inkohärente Überlagerung der Strahlung vieler Elektronen N_e

$$I = evn_l \approx \frac{ecN_e}{L} = \frac{ecN_e}{\lambda_u N} \Rightarrow N_e = \frac{I\lambda_u N}{ec}$$



$$N_e = \frac{I\lambda_u N}{ec}, \quad \frac{dP}{d\Omega} = N_e \cdot \left. \frac{dP}{d\Omega} \right|_e$$

- Strahlung eines Ensembles von N_e Elektronen ist somit

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{eN\gamma^4 I}{\epsilon_0 \lambda_u} \frac{K^2}{(1 + K^2/2)^3} \left(\frac{1 + 2\gamma^{*2}\theta^2(1 - 2\cos^2\phi) + \gamma^{*4}\theta^4}{(1 + \gamma^{*2}\theta^2)^5} \right)$$

⇒ Spektrale Leistungsdichte im Kern ist somit $\propto N^2$, da $E/\Delta E = N$ für Undulatoren mit $K \leq 1$.

Undulator

Vergleich der verschiedenen Quellen

$$\begin{array}{ll} \text{Dipol:} & P \\ \text{Wiggler:} & N \cdot P \\ \text{Undulator:} & N^2 \cdot P \end{array}$$

Beim FEL werden wir sehen, daß für diesen dann

$$N^2 \cdot N_e^2$$

gilt

Brilliance

- Eine wichtige Größe zur Charakterisierung von Synchrotronstrahlung ist die Brilliance

$$B := \frac{\Delta P}{\Delta A \cdot \Delta \Omega}$$

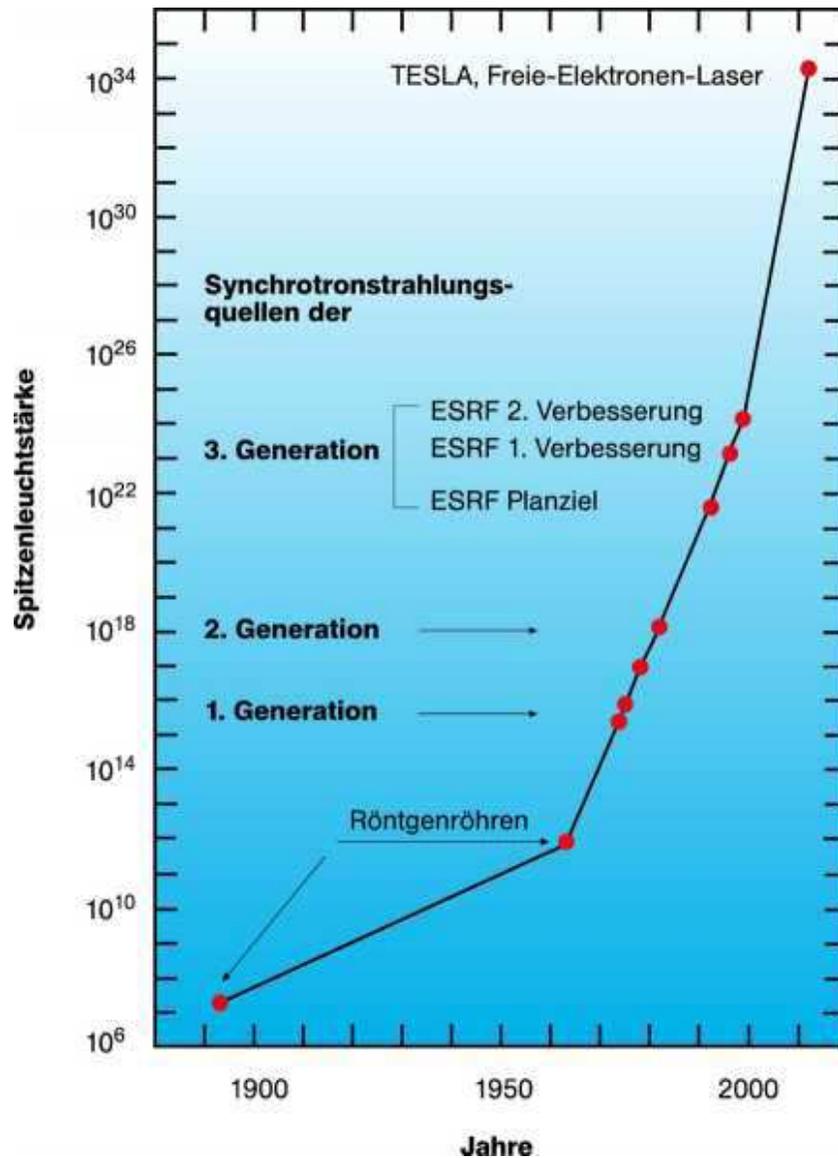
Spektrale Brilliance

$$B_{\Delta\omega/\omega} := \frac{\Delta P}{\Delta A \cdot \Delta \Omega \cdot \Delta\omega/\omega}$$

- Dichte der Photonen im transversalen Phasenraum
- Um eine möglichst hohe Photonendichte am Ort des Experimentes zu erreichen, muß die Brilliance so groß wie möglich sein
- Größtmöglich Brilliance → Laser
- Einheit

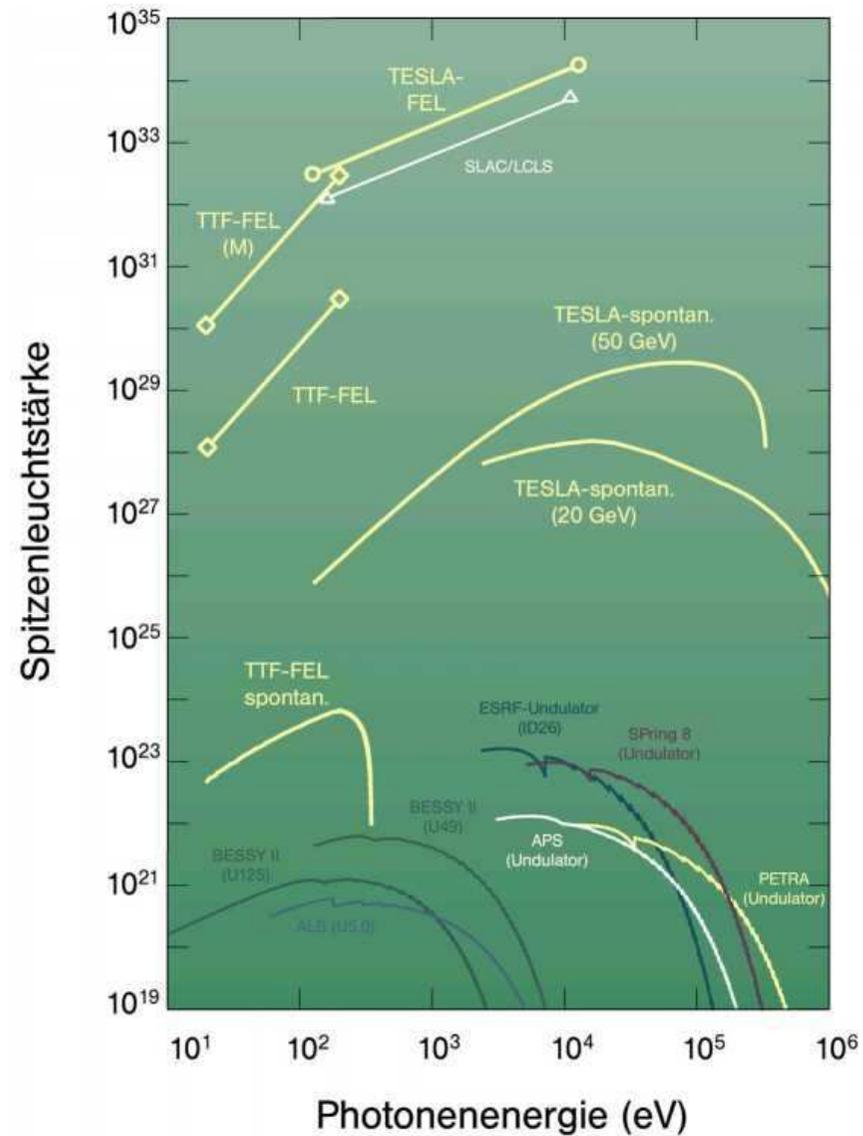
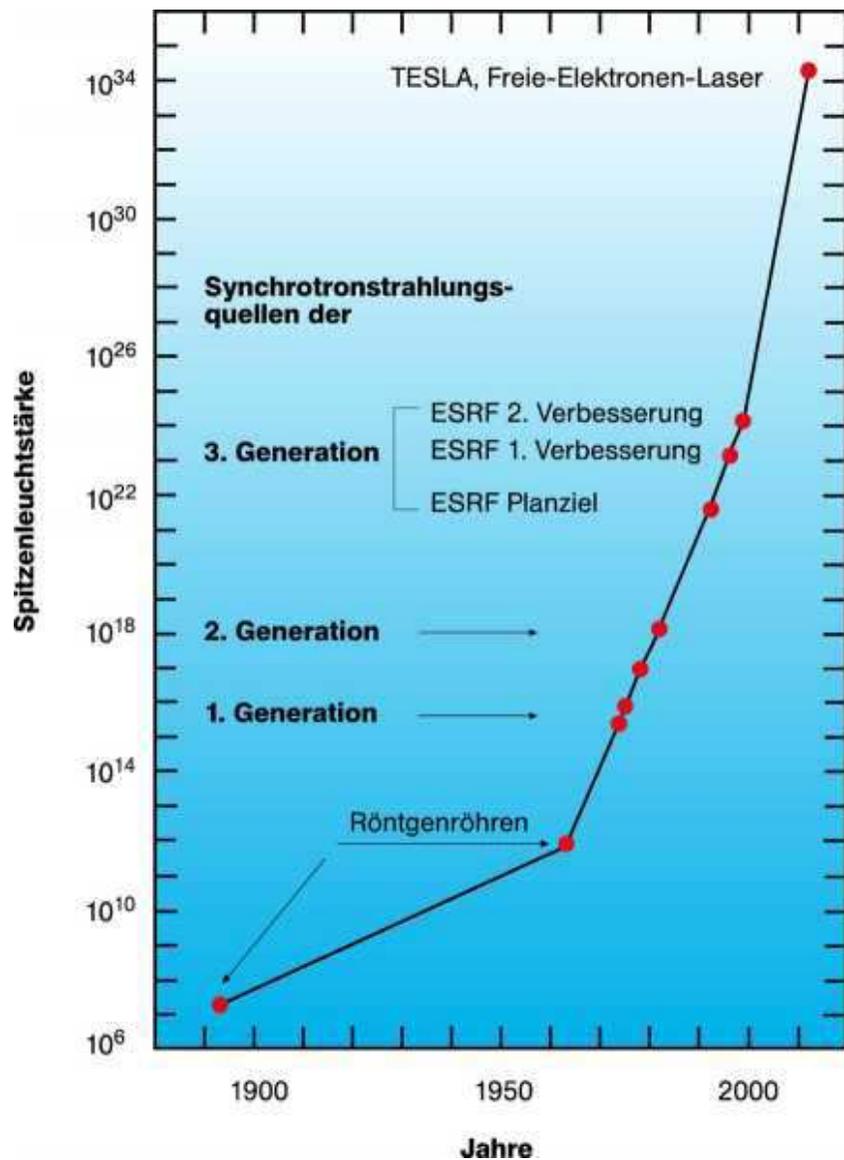
$$[B_{\Delta\omega/\omega}] = \frac{\text{Photonen}}{s \cdot \text{mm}^2 \cdot \text{mrad}^2 \cdot 0.1\% \text{BW}}$$

Brilliance

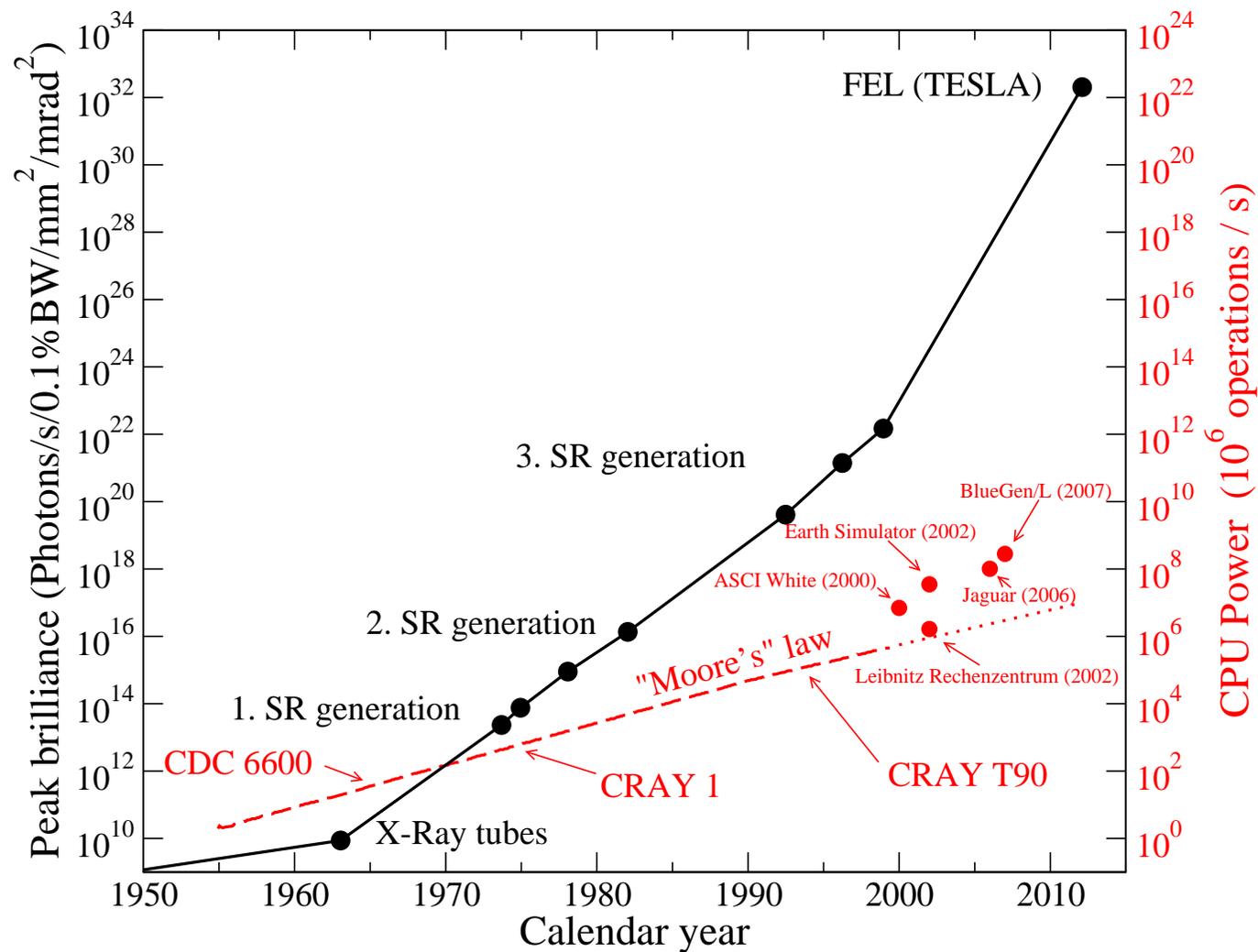


- Entwicklung der Brillianz verschiedener Röntgenquellen mit der Zeit

Brilliance

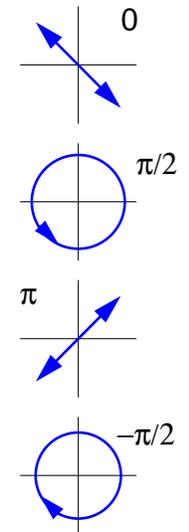
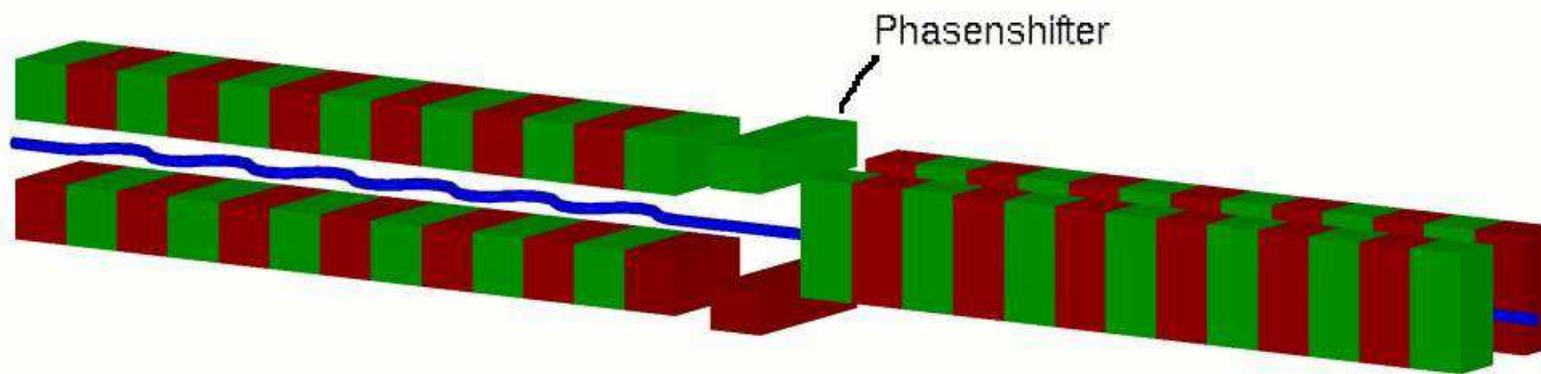


Brilliance



Undulator Polarisation

- Undulator Strahlung ist **linear** polarisiert.
- Erzeugung zirkular polarisierter Strahlung



- Gekreuzte Undulatoren
- Die senkrecht zueinander polarisierte Strahlung der beiden Teil-Undulatoren kann durch eine Variation der Phase von Elektronenstrahl und Licht zu elliptisch polarisiertem Licht addiert werden.

Undulator Polarisation

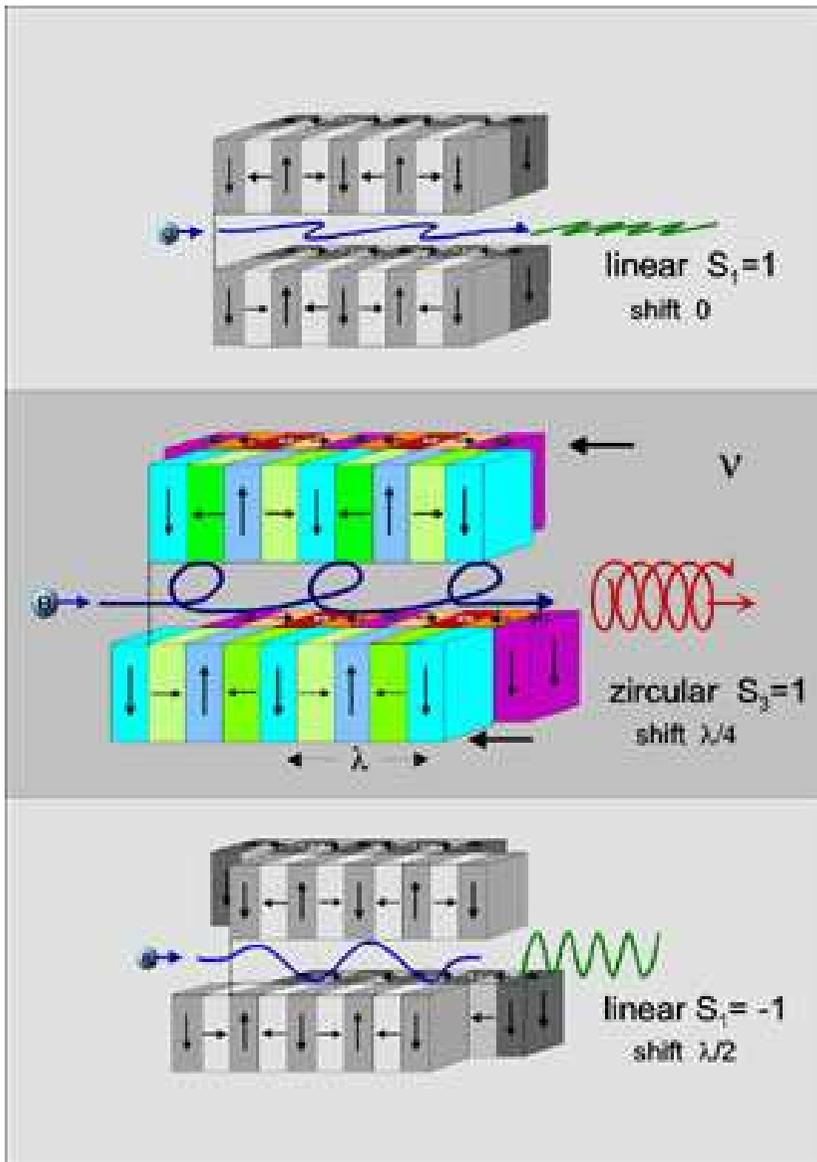
- Undulator Strahlung ist **linear** polarisiert.
- Sasaki-Type Undulator (Helicale undulator)
“Aufschneiden” eines Undulators der Länge nach und verschieben der Komponenten gegeneinander.

- Magnetfeld

$$\vec{B}_U = \vec{e}_x B_U \cos k_U z - \vec{e}_y B_U \sin k_U z$$

- Elektronen bewegen sich dann auf einer Spiralbahn (Helix) durch den Undulator und erzeugen direkt ellipisch polarisiertes Licht (EPU – Elliptical polarised undulator)
- v_z -Komponente bleibt bei einer rein zirkularen Bahn konstant!

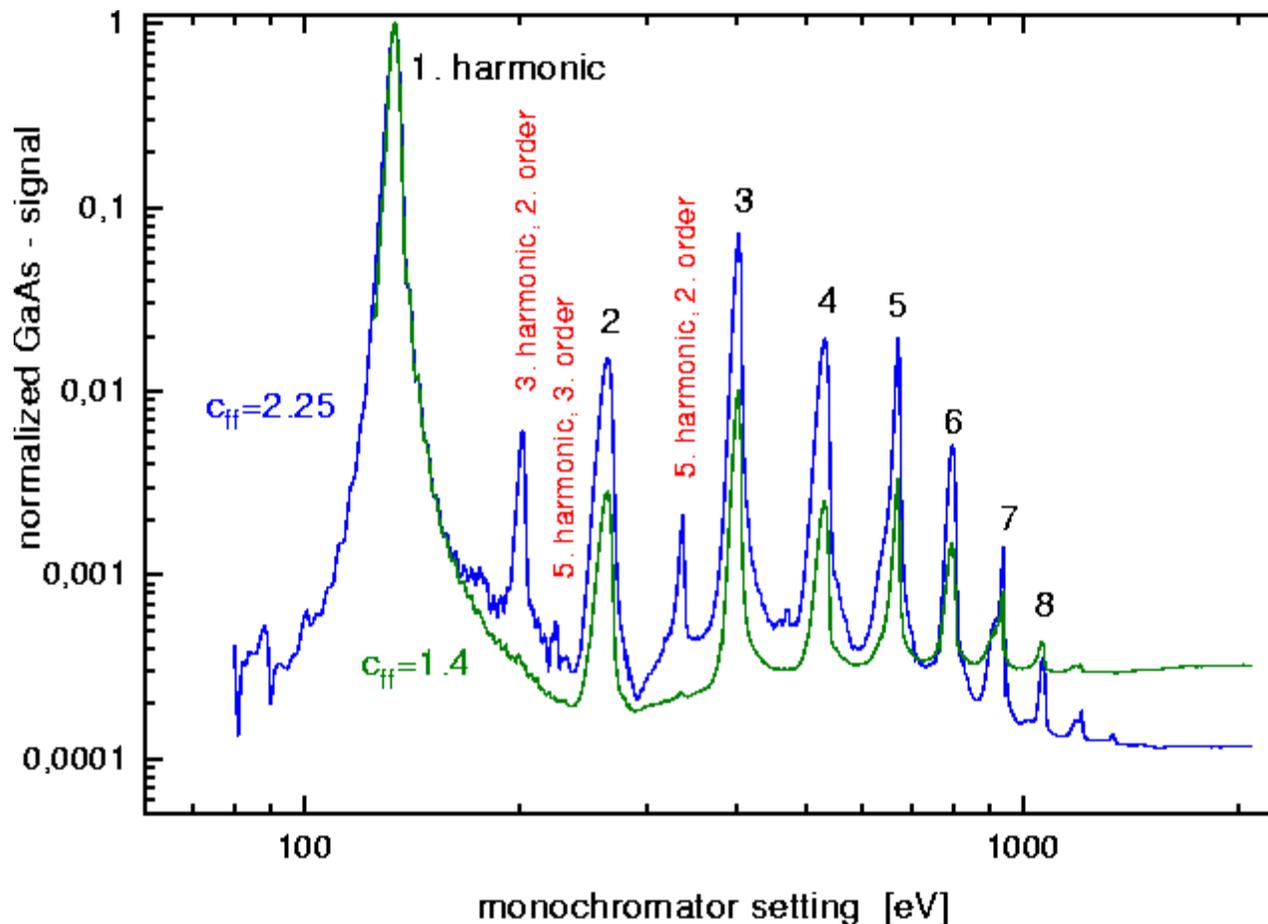
Undulator Polarisation



Sasaki Undulator

Durch schieben der Magnetenstrukturen gegeneinander können fast beliebige Polarisationen erzeugt werden.

Undulator Harmonische



- Neben der Fundamentalen werden auch höhere Harmonische der Undulatorstrahlung beobachtet
- Gerade Harmonische habe eine andere Charakteristik
- Warum ?

Undulator Harmonische

- Früheres Ergebnis für die Geschwindigkeiten:

$$v_z = c \left(1 - \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2} - \frac{K^2}{4\gamma^2} \cos 2k_u z \right)$$

$$v_x = \frac{cK}{\gamma} \sin k_u z$$

- Integration und Transformation in das x', z', t' -System

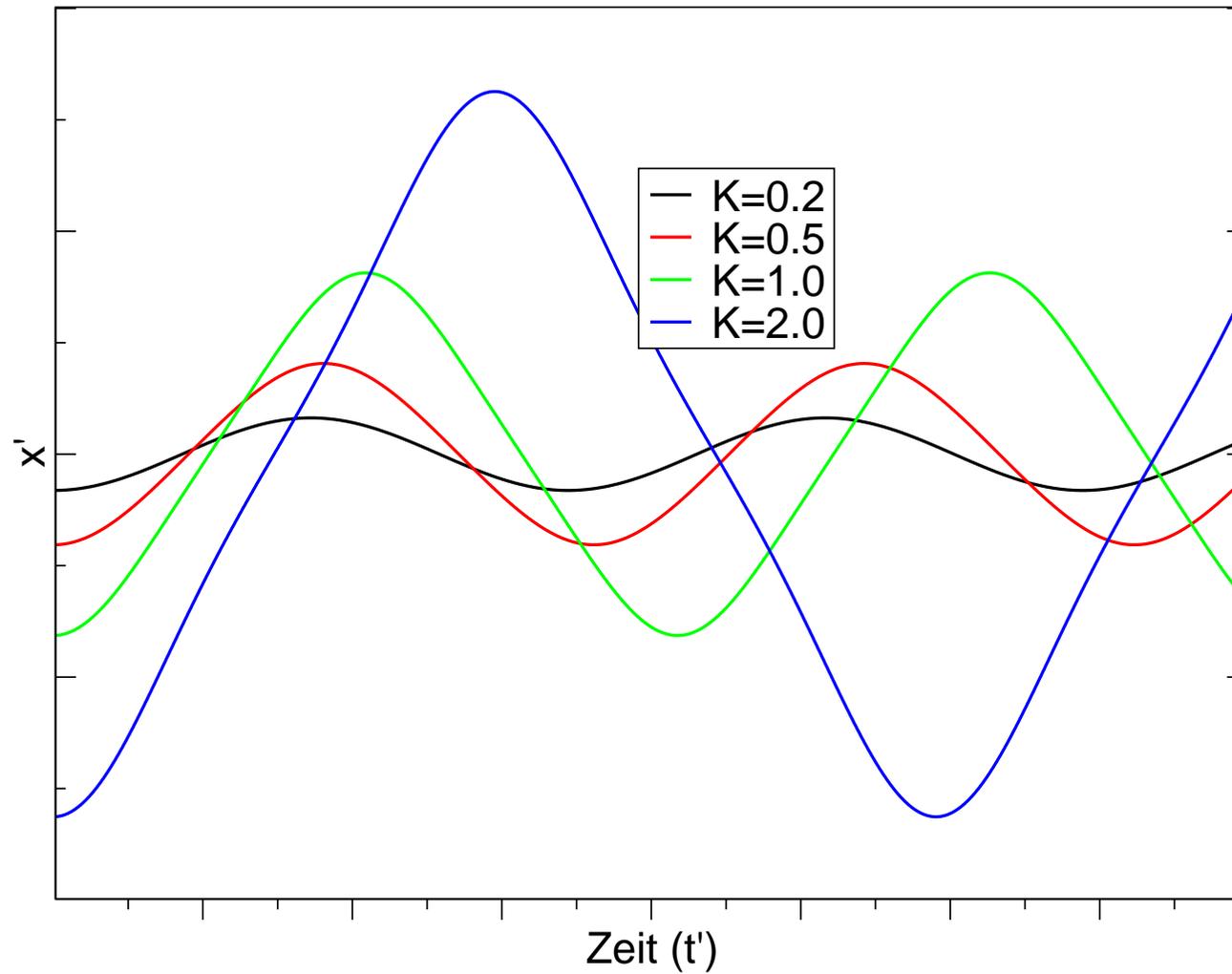
$$z'(t') = \frac{K^{*2}}{8k'_u} \sin(\omega'_u t' + 2k'_u z')$$

$$x'(t') = -\frac{K^*}{k'_u} \left(\cos \omega'_u t' \cos(K^{*2}/8 \sin 2\omega'_u t') - \sin \omega'_u t' \sin(K^{*2}/8 \sin 2\omega'_u t') \right)$$

$$K^* = \frac{K}{\sqrt{1 + K^2/2}}, k'_u = \gamma^* \cdot k_u, \omega'_u = \gamma^* \cdot \omega_U, \gamma^* = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + K^2/2}}$$

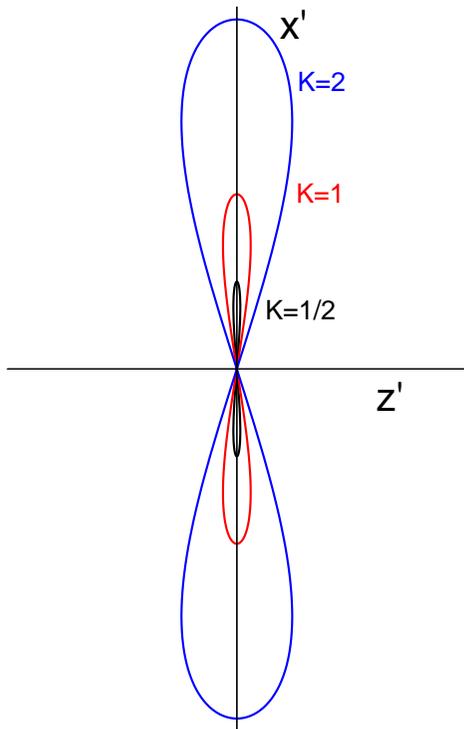
- Anharmonische Bewegung für große K

Undulator Harmonische



Undulator Harmonische

- Früheres Ergebnis für die Geschwindigkeiten in einem planaren Undulator:



$$v_z = c \left(1 - \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2} - \frac{K^2}{4\gamma^2} \cos 2k_u z \right)$$

$$v_x = \frac{cK}{\gamma} \sin k_u z$$

- Beschränkung auf die Bewegung in den kleinsten Harmonischen

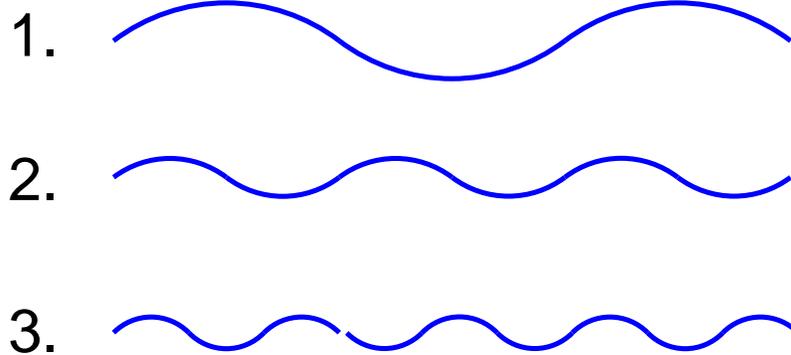
$$\frac{x'(t')}{\lambda'_u} = -\frac{K}{2\pi} \cos \omega'_u t'$$

$$\frac{z'(t')}{\lambda'_u} = -\frac{K^2}{16\pi} \sin 2\omega'_u t'$$

Im x', z', t' -System entspricht diese Bewegung einer 8

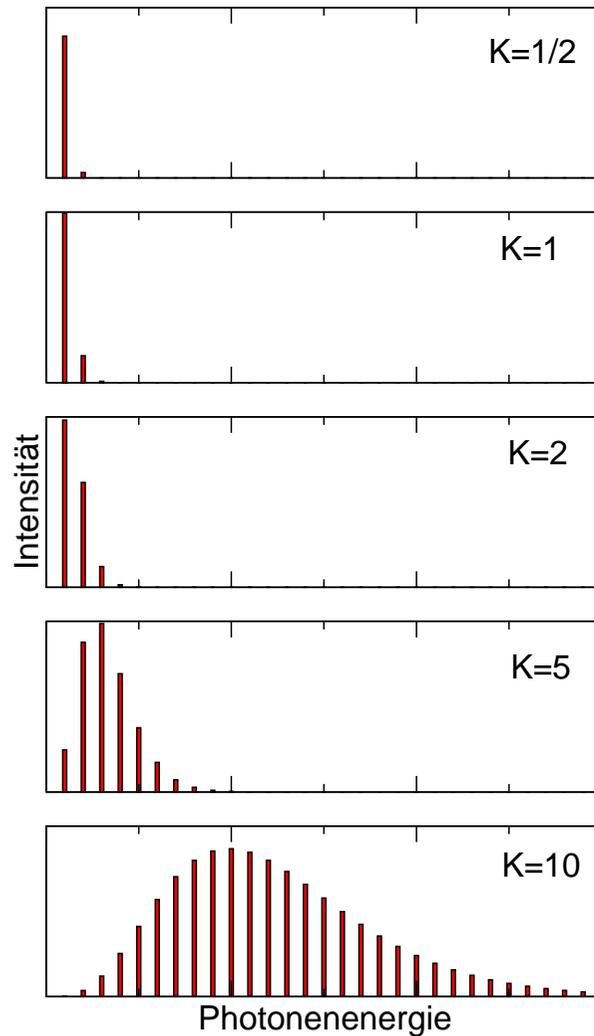
Undulator Harmonische

Undulator



- Gerade Ordnungen sind nicht in der richtigen Phase mit dem Undulator Feld
- Keine geraden Ordnungen in der x' -Richtung
- Eine EPU erzeugt **keine** höheren Ordnungen, da die v_z -Komponente konstant ist

Undulator – Wiggler



- Übergang vom Undulator zum Wignlerspektrum
- Abgestrahlte Leistung in den höheren Harmonischen

$$\frac{dP'}{d\Omega'} \propto n^4 K^{*2n}$$

- Starke Zunahme der Intensität in den höheren Ordnungen für großes K

Take Home Message – Insertion Devices

- Insertion Devices sind Multipol-Magnetstruktur die in gerade Segmente eines Speicherringes eingebaut werden.
- Durch Kohärente Überlagerung der SR eines Elektrons wird die Strahlung um den Faktor N^2 intensiver.
- Ein Undulator Spektrum besteht aus verschiedenen Harmonischen mit Breite $E/\Delta E \approx N$.
- Die Wellenlänge der 1. Harmonischen ergibt sich aus der Lorentz-Transformation der Undulatorwellenlänge.
- Die Wellenlänge der Undulatorstrahlung kann durch Variation des Gap's geändert werden.