

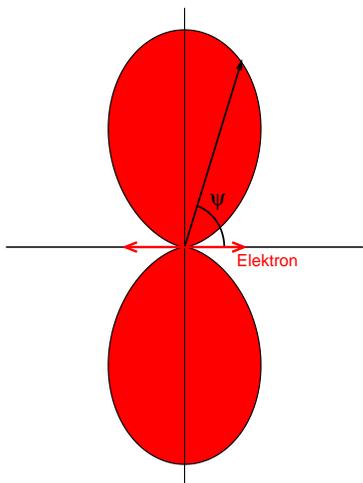
Strahlung beschleunigter Teilchen

Strahlung eines nichtrelativistischen, beschleunigten Teilchens

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 m_0^2 c^3} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2$$

- Winkelverteilung entspricht der eines Hertz'schen Dipol

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 m_0^2 c^3} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2 \sin^2 \psi.$$



Die Energie wird dabei wie beim Hertz'schen Dipol senkrecht zur Richtung der Beschleunigung abgestrahlt.

Strahlung beschleunigter Teilchen

- relativistische Teilchen:

Transformation der Zeit und des Viererimpulses

$$dt \rightarrow d\tau = \frac{1}{\gamma} dt, \quad \gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\left(\frac{dP_\mu}{d\tau} \right)^2 \rightarrow \left(\frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{d\tau} \right)^2$$

- Relativistische abgestrahlte Leistung

$$P = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{1}{(m_0 c^2)^2} \left[\left(\frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{d\tau} \right)^2 \right]$$

- Lineare- Kreis-
Beschleunigung

$$\frac{dv}{dt} \parallel \vec{v} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} \perp \vec{v}$$

Lineare Beschleunigung

- relativistischer Energiesatz

$$E^2 = (m_0 c^2)^2 + p^2 c^2 \Rightarrow E \frac{dE}{d\tau} = c^2 p \frac{dp}{d\tau}$$

mit $E = \gamma m_0 c^2$ und $p = \gamma m_0 v$

$$\frac{dE}{d\tau} = v \frac{dp}{d\tau} \quad (1)$$

- Relativistische Strahlungsformel

$$P = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{1}{(m_0 c^2)^2} \left[\left(\frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{d\tau} \right)^2 \right]$$

und einsetzen von (1) liefert

$$(1 - \beta)^2 \left(\frac{d\vec{p}}{d\tau} \right) = \left(\frac{d\vec{p}}{\gamma d\tau} \right) = \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)$$

Lineare Beschleunigung

$$P = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{1}{(m_0 c^2)^2} \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2 = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{1}{(m_0 c^2)^2} \left(\frac{d\vec{E}}{dx} \right)^2 \quad (2)$$

- Beispiel:
Energiegewinn

$$dE/dx = 25 \text{ MeV}/m \Rightarrow P = 1.1 \cdot 10^{-16} \text{ W}$$

- Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P}{dE/dt} = \frac{P}{v dE/dx} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(m_0 c^2)^2} \cdot \frac{1}{\beta} \frac{dE}{dx} \approx 10^{-13}$$

- Energieverlust kann vernachlässigt werden!

Kreisbeschleunigung

- Auf einer Kreisbahn bleibt die Teilchenenergie konstant

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow P = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{\gamma^2}{(m_0 c^2)^2} \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2$$

- Impulsänderung auf der Kreisbahn

$$\frac{dp}{dt} = p\omega = p \frac{v}{R} \approx p \frac{c}{R} = \frac{E}{R}$$

- Wir betrachten nur extrem relativistische Geschwindigkeiten mit $v \approx c$. Dann ist $p \cdot c \gg m_0 \cdot c^2$ und somit $E = p \cdot c$. Weiter ist $\gamma = E/m_0 c^2$.

$$P = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{(E/m_0 c^2)^2}{(m_0 c^2)^2} \left(\frac{E}{R} \right)^2 = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{1}{(m_0 c^2)^4} \frac{E^4}{R^2}$$

Kreisbeschleunigung

- Auf einer Kreisbahn bleibt die Teilchenenergie konstant

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow P = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{\gamma^2}{(m_0 c^2)^2} \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2$$

- Impulsänderung auf der Kreisbahn

$$\frac{dp}{dt} = p\omega = p \frac{v}{R} \approx p \frac{c}{R} = \frac{E}{R}$$

- Wir betrachten nur extrem relativistische Geschwindigkeiten mit $v \approx c$. Dann ist $p \cdot c \gg m_0 \cdot c^2$ und somit $E = p \cdot c$. Weiter ist $\gamma = E/m_0 c^2$.

$$P = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{(E/m_0 c^2)^2}{(m_0 c^2)^2} \left(\frac{E}{R} \right)^2 = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{1}{(m_0 c^2)^4} \frac{E^4}{R^2}$$

Kreisbeschleunigung

Abgestrahlte Leistung

$$P = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{1}{(m_0 c^2)^4} \frac{E^4}{R^2} \quad (3)$$

- Die abgestrahlte Leistung steigt also mit der **4. Potenz** der Teilchenenergie und des Reziprokwertes der Ruhemasse m_0 !

$$\Rightarrow \left(\frac{m_{\text{Proton}}}{m_e} \right) = 1836^4 = 1.1 \cdot 10^{14}!$$

⇒ Strahlung spielt nur bei Elektronen eine Rolle

Kreisbewegung: Energieverlust

- Gesamter Energieverlust während eines Umlaufes

$$\Delta E = \oint P dt = PT = P \frac{2\pi R}{c} = \frac{e^2}{3\epsilon_0 (m_0 c^2)^4} \frac{E^4}{R}$$

$$\Delta E[\text{keV}] = 88.5 \frac{E^4[\text{GeV}]}{R[\text{m}]}$$

Kreisbewegung: Energieverlust

Verlustleistung einiger Speicherringe

	L (m)	E (GeV)	R (m)	B (T)	ΔE (keV)	η (%)
BESSY I	62.4	0.8	1.78	1.50	20.3	$2.5 \cdot 10^{-4}$
BESSY II	240	1.7	4.36		$1.6 \cdot 10^2$	$9 \cdot 10^{-3}$
DORIS II	288	5.0	12.2	1.37	$4.5 \cdot 10^3$	$9 \cdot 10^{-2}$
ESRF	844	6.0	23.4	0.855	$4.9 \cdot 10^3$	$8.2 \cdot 10^{-2}$
PETRA II	2304	23.5	195	0.40	$1.4 \cdot 10^5$	0.6
LEP II	27000	70.0	3000	0.078	$7.1 \cdot 10^5$	1.1

- Die Verlustleistung steigt stark mit der Ringenergie an und ist um Größenordnungen höher als bei einem LINAC
- Synchrotron Speicherringe können effektiv Synchrotronstrahlung erzeugen

SR Winkelverteilung

- Wir wollen hier nur den Fall der Kreisbewegung betrachten, da nur dort nennenswert Strahlung emittiert wird.

Skizze der Herleitung

- Im Schwerpunktsystem des Elektrons entspricht die Emission der des Herz'schen Dipol
- Transformation dieser Verteilung in das Laborsystem
- Einfache Abschätzung
Ein Photon möge in y' -Richtung senkrecht zur Bewegungsrichtung x' und zur Beschleunigung in z' -Richtung emittiert werden.

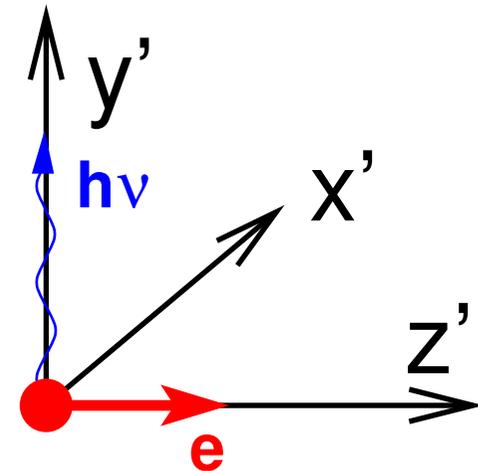
SR Winkelverteilung

- Ein Photon möge in y' -Richtung senkrecht zur Bewegungsrichtung z' und zur Beschleunigung in x' -Richtung emittiert werden.

$$p'_y = p'_0 = \frac{E'}{c}$$

- Viererimpuls

$$P'_{\mu} = \begin{pmatrix} p'_t \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'/c \\ 0 \\ p'_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



SR Winkelverteilung

Lorentztransformation ins Laborsystem

$$P_{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E'/c \\ 0 \\ p'_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma E'/c \\ 0 \\ p'_0 \\ \gamma\beta E'/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma E'/c \\ 0 \\ p'_0 \\ \gamma\beta p'_0 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \left(1 - \beta^2\right)^{-1/2}$$

Winkel zwischen der y-Richtung und der z-Richtung (Flugrichtung)

$$\tan \theta = \frac{p_y}{p_z} = \frac{p'_0}{\beta\gamma p'_0} \approx \frac{1}{\gamma}$$

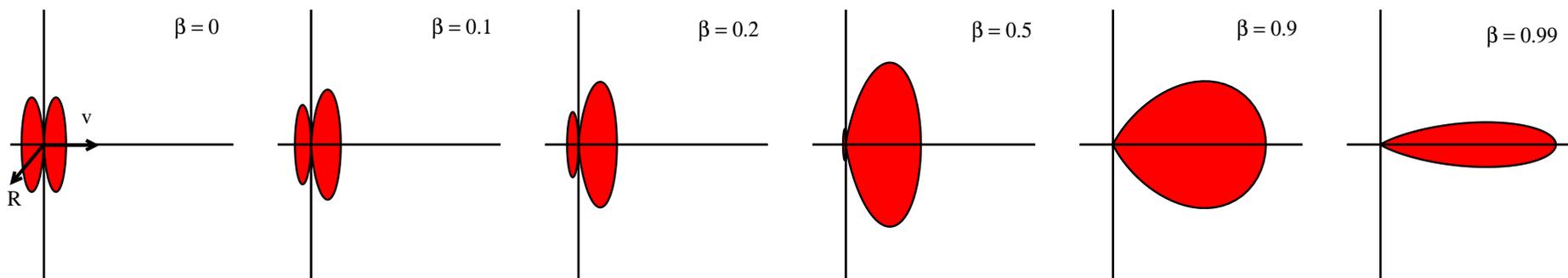
SR Winkelverteilung

Emittierte Strahlungsleistung in den Raumwinkel $d\Omega$

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{\dot{\beta}^2}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right)$$

(Jackson)

- Scharfe Bündelung der Strahlung in Vorwärtsrichtung



Kreisbewegung (transversale Beschleunigung)

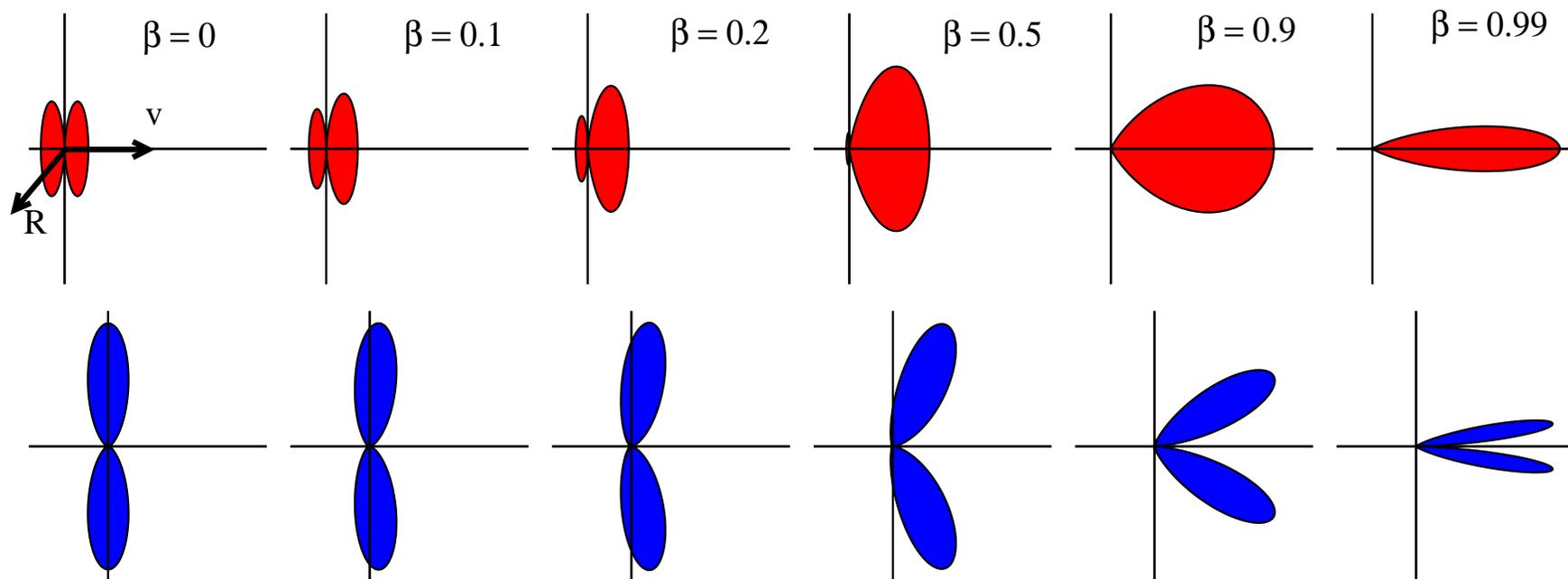
SR Winkelverteilung

- transversal

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{(d\beta/dt)^2}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right)$$

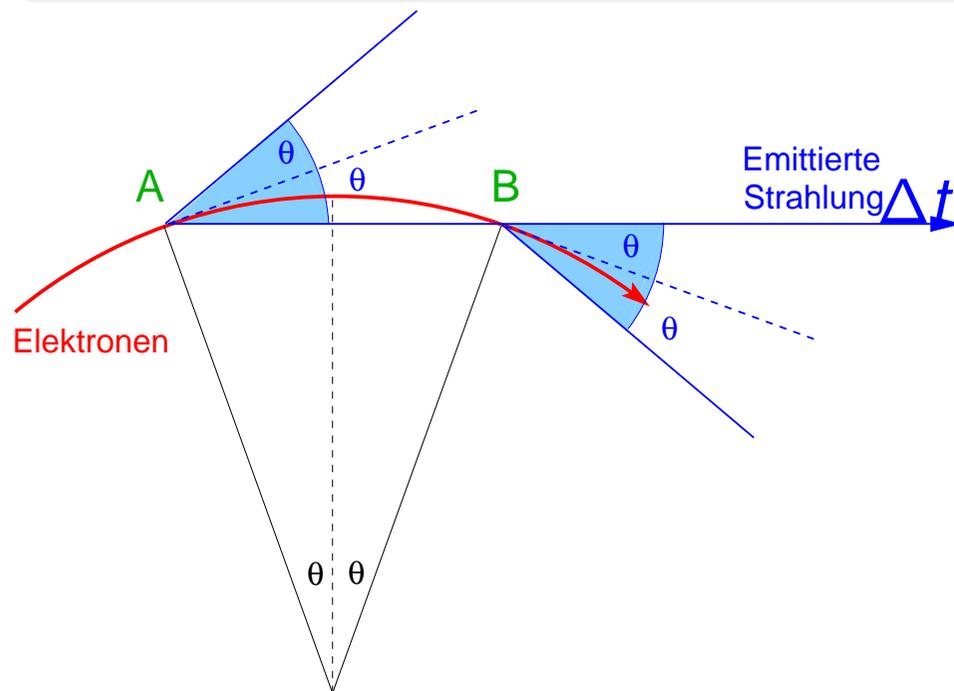
- longitudinal

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \sin \theta)^5} \cdot \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2$$



SR Zeitstruktur

“Vorbeiflug” eines Elektrons am Beobachter $\theta \approx 1/\gamma \Rightarrow$



$$\begin{aligned}
 &= t_e - t_\gamma = \frac{2R\theta}{c\beta} - \frac{2R \sin \theta}{c} \\
 &= \frac{2R}{c} \left(\frac{\theta}{\beta} - \theta + \frac{\theta^3}{3!} - \frac{\theta^5}{5!} + \dots \right) \\
 &\approx \frac{2R}{c} \left(\frac{1}{\beta\gamma} - \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{6\gamma^3} \right) \approx \frac{4R}{3c\gamma^3}
 \end{aligned}$$

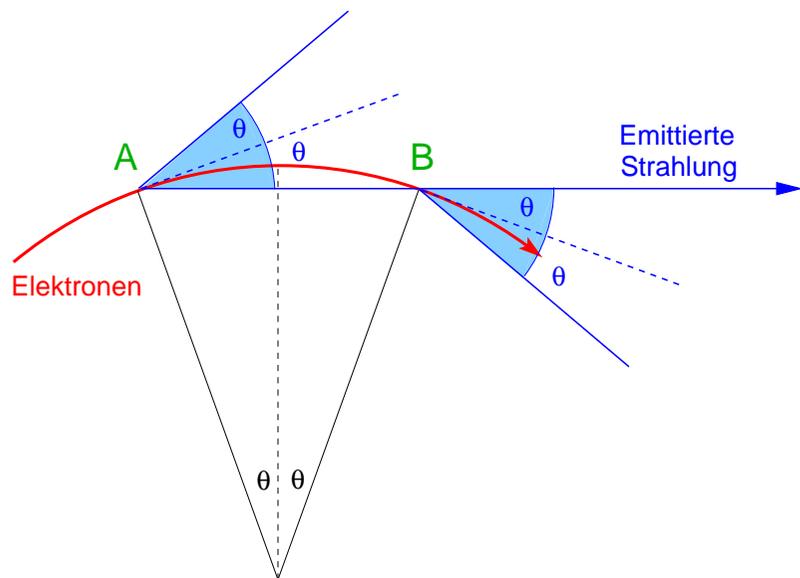
Typische Frequenz

$$\omega_{\text{typ}} := \frac{2\pi}{\Delta t} = \frac{3\pi c\gamma^3}{2R}$$

Kritische Frequenz

$$\omega_c := \frac{\omega_{\text{typ}}}{\pi} = \frac{3c\gamma^3}{2R}$$

SR Zeitstruktur



E (GeV)	γ	R (m)	Δt ($10^{-18}s$)	E_c (eV)
0.8	1566	1.8	2.1	631
1.7	3327	4.36	0.48	2725
6.0	11742	23.4	0.0064	20500

SR Spektrum

- Emittierte Strahlungsleistung in den Raumwinkel $d\Omega$ war

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{\dot{\beta}^2}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right)$$

- Das abgestrahlte Spektrum kann durch eine Fouriertransformation des Zeitspektrum berechnet werden. Elementar, aber doch sehr aufwendig (siehe z.B. Jackson)!

SR Spektrum

- Emittierte Strahlungsleistung in den Raumwinkel $d\Omega$ war

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{\dot{\beta}^2}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right)$$

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 75, NUMBER 12

JUNE 15, 1949

On the Classical Radiation of Accelerated Electrons

JULIAN SCHWINGER

Harvard University, Cambridge, Massachusetts

(Received March 8, 1949)

This paper is concerned with the properties of the radiation from a high energy accelerated electron, as recently observed in the General Electric synchrotron. An elementary derivation of the total rate of radiation is first presented, based on Larmor's formula for a slowly moving electron, and arguments of relativistic invariance. We then construct an expression for the instantaneous power radiated by an electron moving along an arbitrary prescribed path. By casting this result

tion of motion is a strongly preferred direction of emission at high energies. The spectral distribution of the radiation depends upon the detailed motion over a time interval large compared to the period of the radiation. However, the narrow cone of radiation generated by an energetic electron indicates that only a small part of the trajectory is effective in producing radiation observed in a given direction, which also implies that very high frequencies are emitted. Accordingly, we

SR Spektrum

- Spektrale Photonendichte, mit N Elektronen im Speicherring (Schwinger¹)

$$\frac{d\dot{N}}{d\epsilon/\epsilon} = \frac{P_0}{E_c} \cdot S_s \left(\frac{E}{E_c} \right)$$

mit

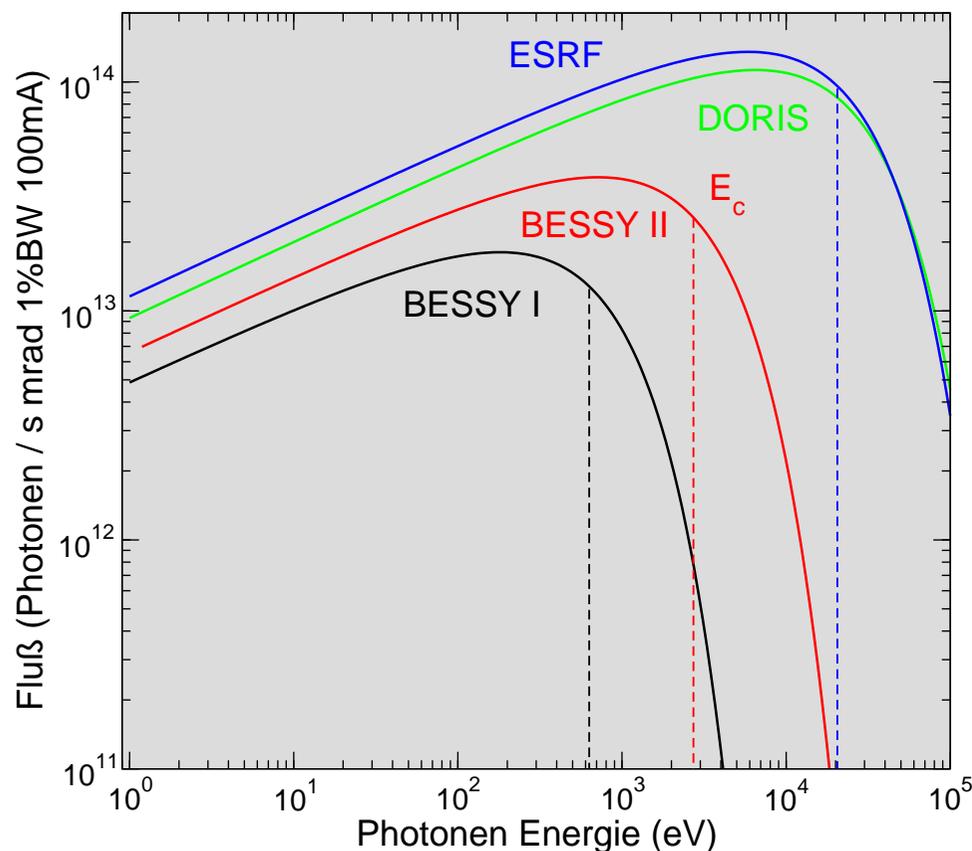
$$P_0 = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{1}{(m_0 c^2)^4} \frac{E^4}{R^2} N = \frac{e\gamma^4}{3\epsilon_0 R} I_{Ring}$$

$$S_s(\xi) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \cdot \xi \cdot \int_{\xi}^{\infty} K_{5/3}(\xi) d\xi$$

$K_{5/3}$: modifizierte Besselfunktion

¹J. Schwinger, Phys. Rev. **75** 1912-1925 (1949)

SR Spektrum



- Strahlungsquelle, die einen sehr weiten Bereich abdeckt.

-

$$\int_0^1 S_s(\xi) d\xi = \frac{1}{2}$$

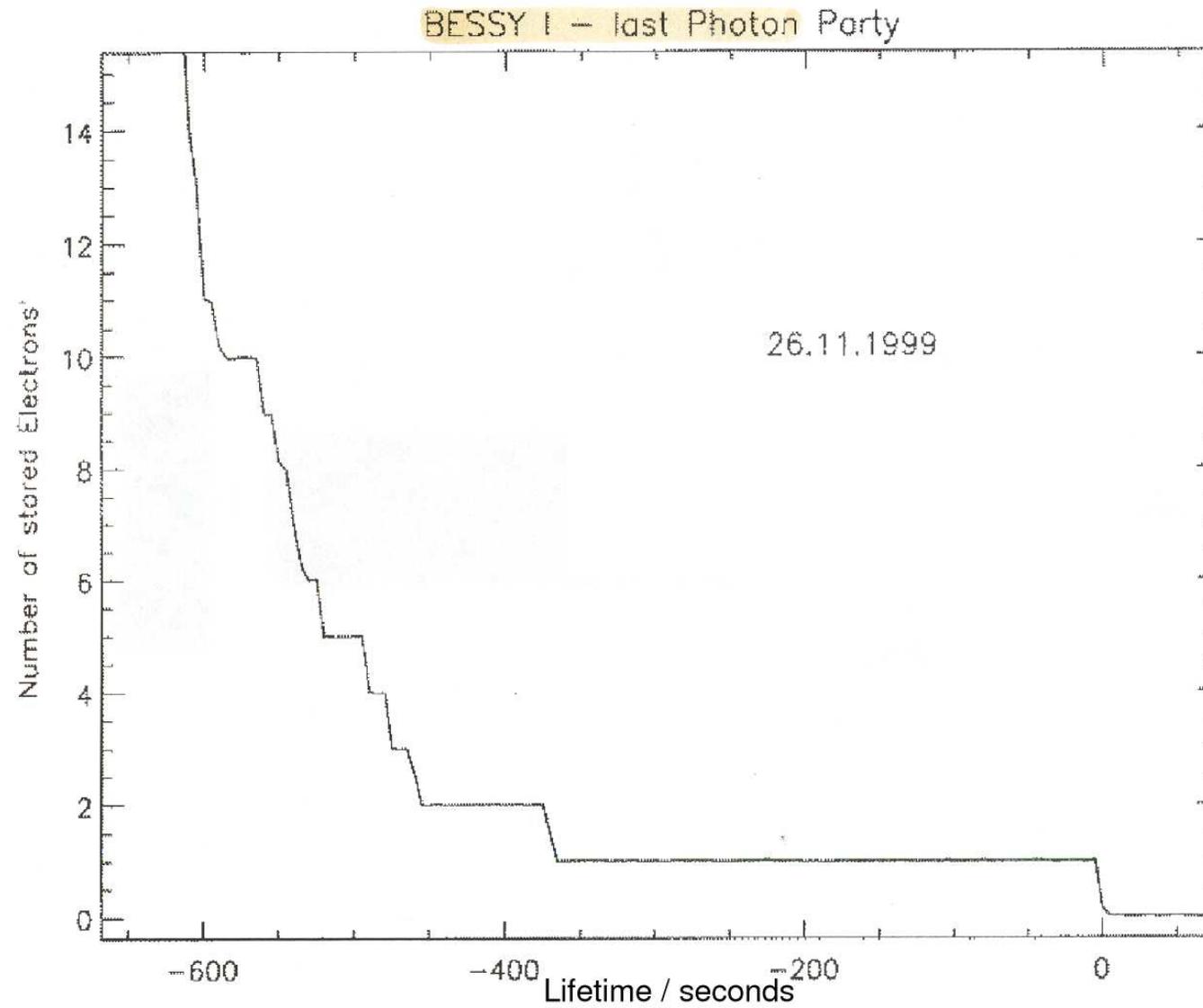
- ⇒ E_c teilt das Spektrum der Synchrotronstrahlung in zwei Bereiche gleicher Strahlungsleistung

- Spektrum ist exakt berechenbar

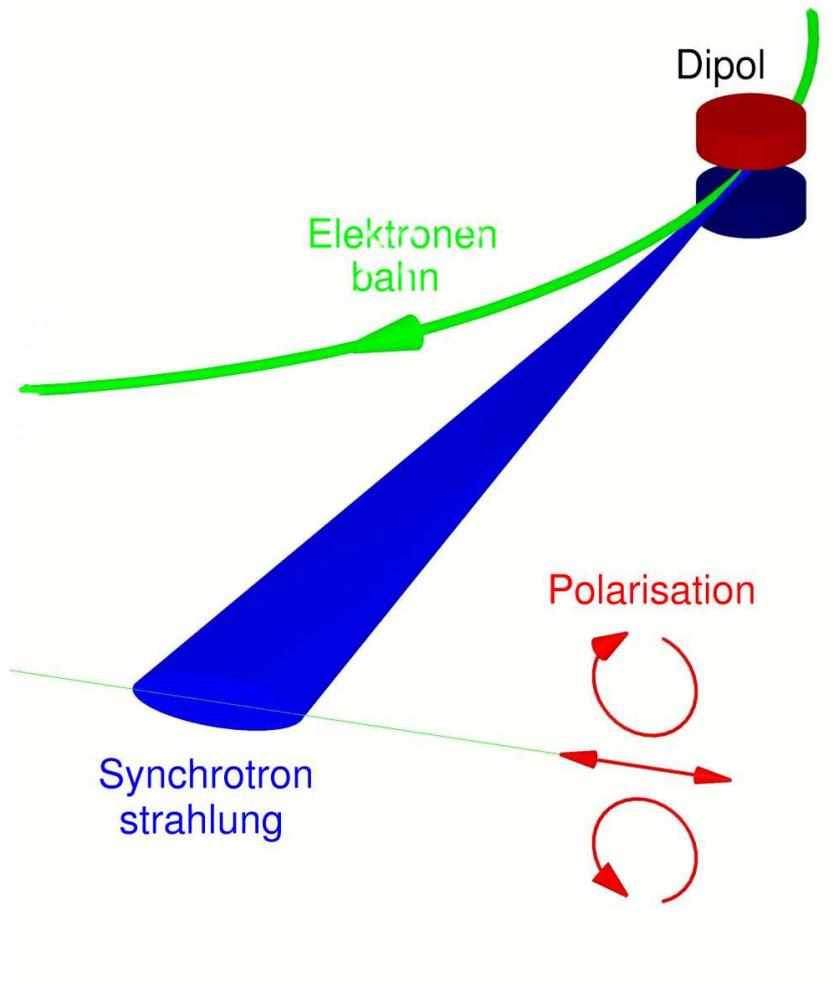
⇒ **Primär Normal!**

- Zählen einzelner Elektronen möglich (Anwendung in der Metrologie)

SR einzelner Elektronen



SR Polarisation



- Synchrotronstrahlung ist in der Bahnebene linear polarisiert
- Ausserhalb der Bahnebene ist die Strahlung zirkular polarisiert, mit allerdings stark abnehmender Intensität, durch die starke Bündelung in Vorwärtsrichtung
- Kann als Projektion der Kreisbahn verstanden werden
- Eigenschaft hat eine ganze Gruppe von neuen Experimenten zum Magnetismus eröffnet

Take Home Message – Synchrotronstrahlung

- Synchrotronstrahlung wird von beschleunigten, hochrelativistischen Teilchen abgestrahlt.
- Abstrahlung spielt nur bei der Kreisbeschleunigung eine Rolle.
- Für die abgestrahlte SR Leistung gilt $P \propto (m_0 c^2)^{-4} E^4 / R^2$.
- Abstrahlung bei Elektronen ist $1836^4 \approx 10^{14}$ stärker als für Protonen.
- Starke Vorwärtsrichtung der SR mit Öffnungswinkel $\theta \cong 1/\gamma$.
- Sehr breite spektrale Verteilung der SR vom Infrarot bis in den harten Röntgenbereich.
- Kritische Energie E_c teilt Spektrum in Bereiche gleicher integraler Strahlungsleistung.