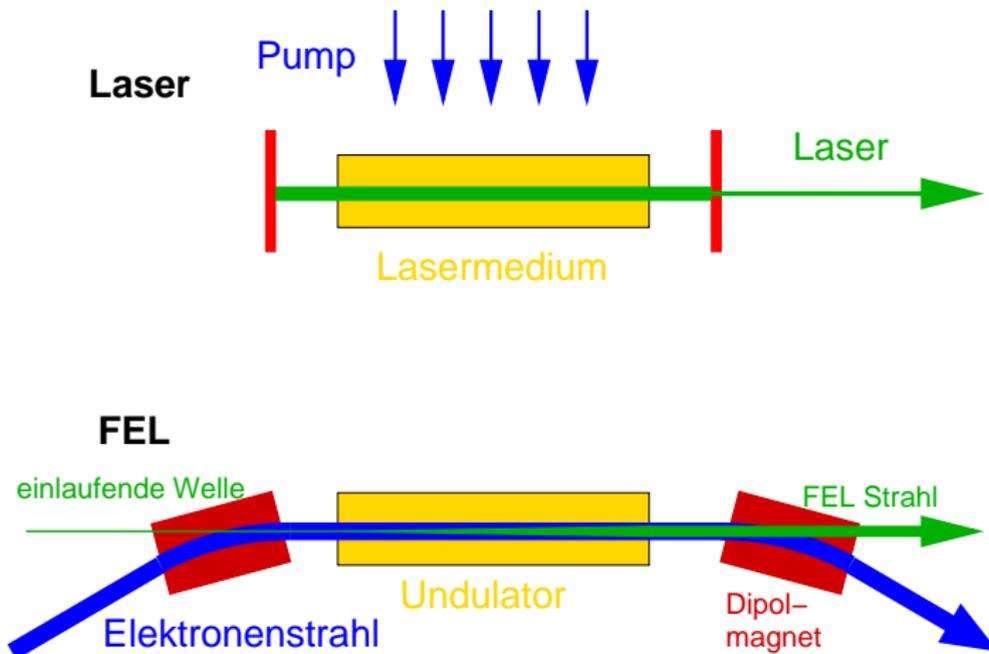


Freie Elektronen Laser

- Energieübertrag
- Verstärkungsbereiche
- Der SASE Prozeß

Laser - FEL



FEL Energieübertrag

- Aus dem Elektronenstrahl muß Energie in das Laserfeld \vec{E}_{FEL} entlang des Weges s übertragen werden.

$$\Delta W = -e \int \vec{E}_{FEL} \cdot d\vec{s} = -e \int \vec{v} \cdot \vec{E}_{FEL} dt$$

- Licht ist transversal polarisiert, so dass

$$\vec{v} \perp \vec{E}_{FEL} \Rightarrow \Delta W = 0$$

- In einem Undulator gibt es eine senkrechte Komponente

$$v_x = \beta c \frac{K}{\gamma} \sin(\omega_u t),$$

die an das FEL Feld ankoppeln kann

- **Ein Undulator ist eine Voraussetzung für den Betrieb eines FEL**

FEL Energieübertrag

- Wechselwirkung zwischen Elektronen und \vec{B} sowie \vec{E}_{FEL} wird durch die Lorentzkraft beschrieben

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e(\vec{E}_{FEL} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Umschreiben liefert

$$\frac{d(\gamma\vec{\beta})}{dt} = -\frac{e}{mc}(\vec{E}_{FEL} + c\vec{\beta} \times \vec{B})$$

- Gesamtenergie

$$W = \gamma mc^2 \Rightarrow \frac{dW}{dt} = mc^2 \frac{d\gamma}{dt}$$

Mit

$$\Delta W = -e \int \vec{E}_{FEL} \cdot d\vec{s} = -e \int \vec{v} \cdot \vec{E}_{FEL} dt$$

FEL Energieübertrag

- Wechselwirkung zwischen Elektronen und \vec{B} sowie \vec{E}_{FEL} wird durch die Lorentzkraft beschrieben

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e(\vec{E}_{FEL} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Umschreiben liefert

$$\frac{d(\gamma\vec{\beta})}{dt} = -\frac{e}{mc}(\vec{E}_{FEL} + c\vec{\beta} \times \vec{B})$$

- Gesamtenergie

$$W = \gamma mc^2 \Rightarrow \frac{dW}{dt} = mc^2 \frac{d\gamma}{dt}$$

Mit

$$\Delta W = -e \int \vec{E}_{FEL} \cdot d\vec{s} = -e \int \vec{v} \cdot \vec{E}_{FEL} dt$$

FEL Energieübertrag

erhält man

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{e}{mc}\vec{\beta} \cdot \vec{E}_{FEL} \quad (7)$$

$$\frac{d(\gamma\vec{\beta})}{dt} = -\frac{e}{mc}(\vec{E}_{FEL} + c\vec{\beta} \times \vec{B}) \quad (8)$$

- Näherungen

- Bedingung gilt am Anfang bei schwacher Verstärkung

$$|\vec{E}_{FEL}| \ll c|\vec{\beta} \times \vec{B}|$$

- β variiert viel stärker als γ

$$\frac{d(\gamma\vec{\beta})}{dt} \approx \gamma \frac{d(\vec{\beta})}{dt}$$

FEL Energieübertrag

Damit wird Gleichung (8) zu

$$\Rightarrow \gamma \frac{d(\vec{\beta})}{dt} = -\frac{e}{mc} c\vec{\beta} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \gamma \frac{d(\vec{\beta})}{dt} = -\frac{e}{mc} c\vec{\beta} \times \vec{B} \quad (9)$$

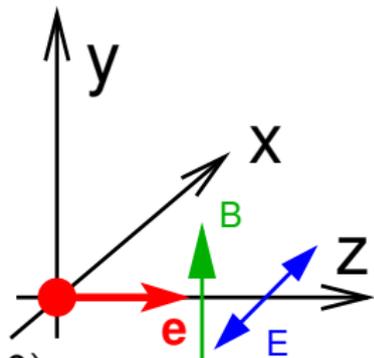
- Es sein gegeben

Undulatorfeld $\vec{B} = (0, B_0 \sin k_u z, 0)$

Laserfeld $\vec{E}_{FEL} = (E_0 \cos(kz - \omega t), 0, 0)$

- Einsetzen von \vec{B} in Gleichung 9 liefert dann

$$\frac{d\beta_x}{dt} = \frac{eB_0}{mc\gamma} c \sin k_u z$$



FEL Energieübertrag

- Integration ($k_u = 2\pi/\lambda_u$)

$$\beta_x = -\frac{e\lambda_u B_0}{2\pi\gamma mc} \cos k_u z = -\frac{K}{\gamma} \cos k_u z$$

K ist der früher definierte Undulatorparameter

- Energiegewinn des Laser Feldes war

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{e}{mc} \vec{\beta} \cdot \vec{E}_{FEL}$$

- Geschwindigkeit

$$\beta_x = -\frac{e\lambda_u B_0}{2\pi\gamma mc} \cos k_u z = -\frac{K}{\gamma} \cos k_u z$$

- Einsetzen von β_x

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{eE_0 K}{\gamma mc} \cos(k_u z) \cos(kz - \omega t)$$

FEL Gleichung

mit $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x + y) + \cos(x - y))$ folgt

Diskussion der FEL Gleichung

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{eE_0K}{2\gamma mc} (\cos[(k + k_u)z - \omega t] + \cos[(k - k_u)z - \omega t]) \quad (10)$$

Der Energieübertrag hängt von der Feldstärke E_0 des FEL-Feldes ab –
Entspricht der induzierten Emission des “normalen” Lasers

- Maximaler Energietransfer: Phase der Oszillation ist konstant

$$\frac{d\Psi_{\pm}}{dt} = \frac{d}{dt}((k \pm k_u)z - \omega t) = (k \pm k_u) \frac{dz}{dt} - \omega \approx 0$$

FEL Gleichung

Die FEL Gleichung kann in der folgenden Form geschrieben werden

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{K \cdot K_{FEL} \cdot k_u}{2\gamma c} (\cos[(k + k_u)z - \omega t] + \cos[(k - k_u)z - \omega t])$$

mit

$$K_{FEL} = \frac{eE\lambda_u}{2\pi mc^2} \quad \text{analog zum Undulator Parameter} \quad K = \frac{eB\lambda_u}{2\pi mc}$$

FEL Energieübertrag

- $\frac{dz}{dt}$ ist die mittlere Geschwindigkeit des Elektrons entlang der z-Achse

Mit $\omega = kc$ und $\dot{z} = \beta^* c$ folgt dann

$$0 = (k \pm k_u)\beta^* - k = (k \pm k_u) \left[1 - \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} \right) \right] - k$$

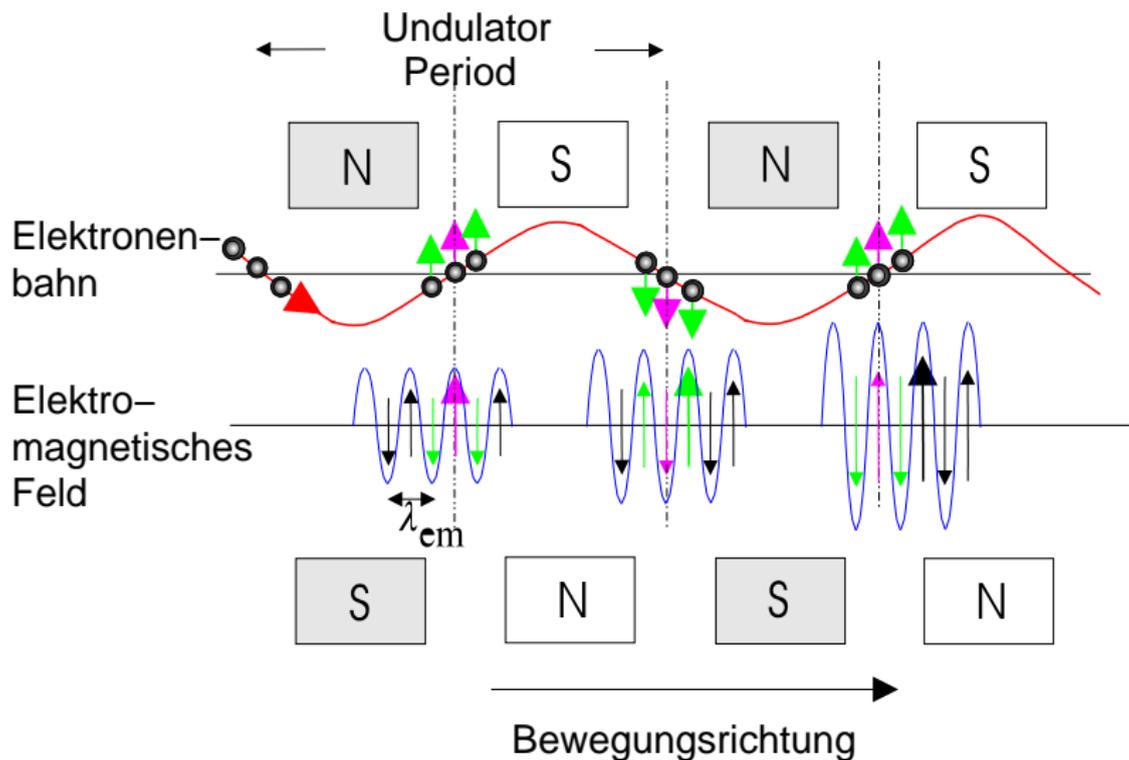
$$\underset{k_u \ll k}{\approx} -\frac{k}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} \right) \pm k_u$$

- Lösung ist nur für $+k_u$ möglich

$$k_u = \frac{k}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} \right)$$

- Das entspricht genau der Bedingung, die wir schon für die von einem Undulator abgestrahlte Wellenlänge λ kennen
- Was bedeutet diese Bedingung ?

FEL Energieübertrag



FEL Mikrobunching

- Für den Energiegewinn hatten wir zwei Gleichungen

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{eE_0K}{2\gamma mc} (\cos[(k + k_u)z - \omega t] + \cos[(k - k_u)z - \omega t])$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{e}{mc} \vec{\beta} \cdot \vec{E}_{FEL}$$

- Wechselwirkung von Elektronenstrahl und FEL-Feld kann durch ein effektives axiales elektrisches Feld beschrieben werden

$$E_z^{eff} = \frac{eB_0E_0\lambda_u}{4\pi mc\gamma\beta_z} \cos[(k_u + k)z - \omega t]$$

- Dies entspricht einem ponderomotivem (effektivem) Potential

$$V_{pond} = \frac{eB_0E_0\lambda_u}{4\pi mc\gamma\beta_z(k_u + k)} \sin[(k_u + k)z - \omega t],$$

das sich entlang der Undulator Achse ausbreitet.

FEL Theorie

- Um die Bewegung der Elektronen in diesem Potential zu verstehen muß die Bewegungsgleichung der Elektronen gelöst werden
- Beim Undulator wurde nur die Wechselwirkung mit dem Undulatorfeld B_U berücksichtigt

FEL – Wechselwirkung mit drei Feldern

- 1 Undulatorfeld B_U wie schon bekannt
- 2 Elektromagnetisches Feld der Laserwelle
- 3 Feld durch die Ladungsdichteverteilung der Elektronen

FEL Theorie

- Im folgenden wird ein helikaler Undulator vorausgesetzt, da es in diesem nicht zu der komplizierten Kopplung der transversalen und longitudinalen Geschwindigkeiten v_x und v_z kommt
- keine höheren Ordnungen
- Magnetfeld

$$\vec{B}_U = \vec{e}_x B_0 \cos k_U z - \vec{e}_y B_0 \sin k_U z$$

FEL Theorie – Lösungsschritte

- 1 Berechne und löse die Bewegungsgleichung der Elektronen im FEL
- 2 Verstärkung bei kleinem Laser Feld
- 3 Berechne das elektromagnetische FEL Feld in einer 1-dimensionalen Näherung
- 4 Verstärkung bei mittlerem Laser Feld (linearer Bereich)
- 5 Sättigung
- 6 Berücksichtige den statistischen Character der FEL Strahlung (SASE)

FEL Theorie – Elektronen

- Lorentzkraft $\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}_u$
- Bewegungsgleichungen

$$m\gamma \frac{dv_x}{dt} = ev_z B_y = -ev_z B_0 \sin k_u z$$

$$m\gamma \frac{dv_y}{dt} = -ev_z B_x = -ev_z B_0 \cos k_u z$$

- Wähle komplexe Schreibweise

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= v_x + iv_y, dz = v_z dt \\ \Rightarrow m\gamma \frac{d\tilde{v}}{dz} &= -ie(B_x + iB_y) = -ieB_0 \exp(-ik_u z) \end{aligned}$$

Integration

$$\frac{\tilde{v}}{c} = \frac{K}{\gamma} \exp(-ik_u z) \quad \text{und} \quad \vec{v}_\perp = c \frac{K}{\gamma} (\vec{e}_x \cos k_u z - \vec{e}_y \sin k_u z)$$

FEL Theorie – EM Welle

- Zirkular polarisierte EM Welle parallel zum Elektronenstrahl
Energieaustausch war

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = -e\vec{v}_\perp \cdot \vec{E}_\perp \\ \vec{E}_\perp &= E_L \left[\vec{e}_x \cos\left(\omega\left(\frac{z}{c} - t\right)\right) - \vec{e}_y \sin\left(\omega\left(\frac{z}{c} - t\right)\right) \right]\end{aligned}\quad (11)$$

T : Energie des Elektronenstrahl

- mit $dz = v_z dt$ und Einsetzen in Gleichung (11) folgt ($v_z \cong c$)

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dz} &= \frac{dT}{dt} \frac{dt}{dz} = -\frac{e}{v_z} (v_x E_x + v_y E_y) \\ &\cong -e \frac{K}{\gamma} E_L \left[\cos(k_u z) \cdot \cos\left(\omega\left(\frac{z}{c} - t\right)\right) \right. \\ &\quad \left. - \sin(k_u z) \cdot \sin\left(\omega\left(\frac{z}{c} - t\right)\right) \right]\end{aligned}$$

FEL Theorie – EM Welle

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dz} &= -e \frac{K}{\gamma} E_L \cos \left[k_U z + \omega \left(\frac{z}{c} - t \right) \right] \\ \Rightarrow \frac{dT}{dz} &= -e \frac{K}{\gamma} E_L \cos \psi\end{aligned}\quad (12)$$

FEL Theorie – Phase

- Phasenbedingung für die Resonanz war

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d\Psi}{dt} = k_u v_z + \frac{\omega}{c} v_z - \omega \\
 \Rightarrow d\Psi &= k_u dz + \frac{\omega}{c} dz - \omega dt \\
 \Leftrightarrow k_u + \frac{\omega}{c} - \frac{\omega}{v_z} &= 0
 \end{aligned}$$

- Außerhalb der Resonanz ist

$$\frac{d\Psi}{dz} = \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{dt}{dz} = k_u + \frac{\omega}{c} - \frac{\omega}{v_z(T)} \neq 0$$

Die Phase Ψ ändert sich, da v_z sich mit der Energie T ändert

- Entwickeln von $1/v_z(T)$ um die Energie T_0 bis zur 1. Ordnung

$$\frac{d\Psi}{dz} = k_u + \frac{\omega}{c} - \frac{\omega}{v_z(T_0)} + \frac{\omega}{v_z^2(T_0)} \frac{dv_z}{dT} (T - T_0) \quad (13)$$

FEL Theorie – Phase

- $dv_z/dT = ?$

$$\frac{dT}{dv_z} = mc^2 \frac{d\gamma}{dv_z} = mc^2 \frac{d}{dv_z} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}$$

$$\frac{d\gamma}{dv_z} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3/2} \left(-\frac{2v_z}{c^2} \right)$$

mit $v_z \cong c$ folgt damit

$$\frac{dv_z}{dT} = \frac{c}{T_0 \gamma^2}$$

- Einsetzen in Gleichung (13) liefert

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dz} &= k_u + \frac{\omega}{c} - \frac{\omega}{v_z(T_0)} + \frac{\omega}{v_z(T_0) T_0 \gamma^2} (T - T_0) \quad (14) \\ &= C + \frac{\omega}{v_z(T_0) T_0 \gamma^2} (T - T_0) \end{aligned}$$

FEL Theorie – Pendelgleichung

- **Beachte:** Wenn $T_0 = T_R$ (T_R : Resonanzenergie), dann ist $C = 0$
- Differenziere Gleichung (14) nach z und setze Gleichung (??) ein

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dz^2} &= \frac{d}{dz} C + \frac{\omega}{v_z(T_0) T_0 \gamma^2} \frac{d}{dz} (T - T_0) \\ &= -\frac{\omega}{v_z(T_0) T_0 \gamma^2} \cdot \frac{eE_L K}{\gamma} \cos \psi \end{aligned}$$

Pendelgleichung

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \Omega^2 \cos \psi = 0 \quad (15)$$

- mit

$$\Omega^2 = \frac{\omega e E_L K}{v_z(T_0) T_0 \gamma^3}$$

FEL – low gain Bereich

- Problem: Das Laserfeld E_L hängt im FEL selbst von der Elektronenbewegung ab
- Zunächst schwache Felder – “low gain” Bereich
- Energiegewinn des Laserfeld eines Elektrons

$$\Delta W_L = -mc^2 \Delta\gamma = \Delta T$$

- Im Feld gespeicherte Energie

$$W_L = \frac{\epsilon_0}{2} E_L^2 \cdot V$$

V : vom Feld eingenommenes Volumen

- Verstärkung

$$G := \frac{\Delta W_L}{W_L} = -\frac{2}{\epsilon_0 E_L^2 V} \cdot \Delta T \quad (16)$$

FEL – low gain Bereich

- Phasengleichung (??)

$$\Psi' = \frac{d\Psi}{dz} = k_u + \frac{\omega}{c} - \frac{\omega}{v_z(T_0)} + \frac{\omega}{v_z(T_0)T_0\gamma^2}(T - T_0)$$

- Phasendifferenz zwischen Anfang und Ende des Undulators

$$\begin{aligned} \Delta\Psi' &= \Psi'_E - \Psi'_A \\ &= \frac{\omega}{v_z(T_0)T_0\gamma^2}(T_E - T_A) = \frac{\omega}{v_z(T_0)mc^2\gamma^3}\Delta T \\ &\cong \frac{k}{mc^2\gamma^3}\Delta T = \frac{k}{\gamma^3}\Delta\gamma \end{aligned}$$

- Einsetzen in Gleichung (16) liefert somit

FEL – low gain Bereich

$$G = -\frac{2}{\epsilon_0 E_L^2 V} \cdot \frac{mc^2 \gamma^3}{k} \Delta \Psi'$$

Verstärkung ergibt sich aus der Änderung der Phasendifferenz

- Bemerkung

$$\lambda_L = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2}\right) \Leftrightarrow k_u = \frac{k}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2}\right) \Rightarrow \frac{\gamma^2}{k} \cong \frac{1}{k_u}$$

$$G \cong -\frac{mc^2 \gamma}{\epsilon_0 E_L^2 V k_u} \Delta \Psi'$$

FEL – low gain Bereich

- An der Gesamtverstärkung sollen alle Elektronen eines Bunches beteiligt sein

⇒ Mittel über alle Elektronen und Anfangsphasen

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta \Psi' \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta \Psi'_i \\
 \Rightarrow G &= -\frac{2}{\epsilon_0 E_L^2 V} \cdot \frac{mc^2 \gamma^3}{k} \langle \Delta \Psi' \rangle \\
 &= -\frac{2mc^2 \gamma^3}{\epsilon_0 E_L^2 k} n_B \langle \Delta \Psi' \rangle
 \end{aligned}$$

- Elektronendichte im Bunch ist $n_B := \frac{n}{V}$

⇒ Die Verstärkung ist also proportional zur Elektronendichte n_B

⇒ Elektronenstrahl muß eine kleine Emittanz haben !

FEL – low gain Bereich

- Berechnung von $\Psi'(z)$ aus der Pendelgleichung (??)

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2} + \Omega^2 \cos \Psi = 0$$

- Multipliziere mit $2 \frac{d\Psi}{dz}$

$$2 \frac{d\Psi}{dz} \frac{d^2\Psi}{dz^2} + 2\Omega^2 \frac{d\Psi}{dz} \cos \Psi = 0$$

- Integration

$$\left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 + 2\Omega^2 \sin \Psi = C$$

- Phasendifferenz eines Elektrons zwischen Anfang und Ende des Undulators

$$\left(\frac{d\Psi}{dz} \right)_E^2 - \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)_A^2 = 2\Omega^2 (\sin \Psi_A - \sin \Psi_E) \quad (17)$$

FEL - low gain Bereich

- Wir betrachten den Bereich um die Resonanzfrequenz T_0 , so daß

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{k}{T_0\gamma^2} \Delta T$$

- Einsetzen in (17) liefert

$$\left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2 = \frac{k^2}{T_0^2\gamma^4} \Delta T^2 + 2\Omega^2(\sin \psi_A - \sin \psi_E)$$

- und somit

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{k}{T_0\gamma^2} \sqrt{1 + \frac{2\Omega^2 T_0^2 \gamma^4}{k^2 \Delta T^2} (\sin \psi_A - \sin \psi_E)}$$

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{k}{T_0\gamma^2} \sqrt{1 + \frac{2eE_L K}{\gamma k \Delta T^2} (\sin \psi_A - \sin \psi_E)}$$

- Die Gleichung läßt sich i.A. nicht mehr weiter integrieren

FEL – low gain 1. Order

- Schwaches Laser Feld $E_L \rightarrow$ Entwickeln von $\sqrt{\cdot}$.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$



$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{k\Delta T}{T_0\gamma^2} \left[1 + \frac{eE_L K \gamma}{k\Delta T^2} (\sin \psi_A - \sin \psi(z)) - \frac{1}{8} \left(\frac{eE_L K \gamma}{k\Delta T^2} \right)^2 (\sin \psi_A - \sin \psi(z))^2 + \dots \right]$$

- Berechnung des Mittelwerts $\langle \frac{d\psi}{dz} \rangle$ in der 1. Ordnung

FEL – low gain 1. Order

- Phase $\Psi(z)$ im sin wird durch die 0. Ordnung bestimmt

$$\Psi'_0 = \frac{k\Delta T}{T_0\gamma^2} \Rightarrow \Psi_0(z) = \frac{k\Delta T}{T_0\gamma^2} \cdot z$$

Phasendifferenz zwischen Anfang und Ende ist somit

$$\Delta\Psi_0 = \frac{k\Delta T}{T_0\gamma^2} \cdot L_u = \frac{k\Delta T}{T_0\gamma^2} \cdot \lambda_u \cdot N$$

$L_u = \lambda_u \cdot N$: Länge des Undulators, N : Periodenzahl

- Einsetzen in die 1. Ordnung

FEL – low gain 1. Order

- Phasenshift in der 1. Ordnung

$$\begin{aligned}\Delta\Psi'_1 &= \Psi'(z_0 + L_u) - \Psi'(z_0) \\ &= \frac{eE_L K}{\gamma\Delta T} \left[\underbrace{-\sin\Psi(z_0 + L_u)}_{=\sin\Psi_a + \Delta\Psi_0} + \underbrace{\sin\Psi(z_0)}_{=\sin\Psi_a} \right]\end{aligned}$$

- Mitteln über alle Anfangsphasen Ψ_A

$$\begin{aligned}\langle \Psi' \rangle_1 &= \frac{eE_L K}{\gamma\Delta T} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\Psi_A \left[\sin\Psi_A - \sin\left(\Psi_A + \frac{k\Delta T}{T\gamma^2} \lambda_u N\right) \right]}_{=0} \\ \Rightarrow G_1 &= 0\end{aligned}$$

- ⇒ Kein Energieübertrag/Verstärkung in der 1. Ordnung
- ⇒ FEL Verstärkung ist Prozess höherer Ordnung
- Berechnung der Verstärkung in 2. Ordnung

FEL – low gain 2. Order

- Berechnung der Phasendifferenz nun aus der 1. Ordnung

$$\Delta\Psi'_1(z) = \Psi'(z) - \Psi'(z_0) = \frac{eE_L K}{T_0 \gamma^3 \Delta T} \left[\sin \Psi_A - \sin \left(\frac{k\Delta T}{T\gamma^2} z + \Psi_A \right) \right]$$

- Integration über die Undulatorlänge $L_u = N_u \cdot \lambda_u$

$$\Delta\Psi_1 = \frac{eE_L K}{T_0 \gamma^3 \Delta T} \left[N_u \cdot \lambda_u \sin \Psi_A - \int_0^{L_u} dz \sin \left(\frac{k\Delta T}{T\gamma^2} z + \Psi_A \right) \right]$$

Mathematica:

$$\int_0^L dz \sin(a/Lz + \Psi) - L \sin \Psi = \frac{L}{a} (\cos \Psi - \cos(a + \Psi)) - a \sin \Psi$$

FEL – low gain 2. Order

- Definiere

$$\frac{2w}{L_u} := \frac{k_L}{\gamma^2} \cdot \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta \Psi_0}{L_u}$$

$$L_u := N_u \lambda_u \text{ Länge des Undulators}$$

- Phasenshift in 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \Delta \Psi_1 &= \frac{eE_0 K}{T_0 \gamma^3 \Delta T} \frac{\gamma^2 T_0}{k_L \Delta T} [\cos \Psi_a - \cos(2w + \Psi_a) - 2w \sin \Psi_a] \\ &= \frac{eE_0 K}{\gamma \Delta T^2 k_L} [\cos \Psi_a - \cos(2w + \Psi_a) - 2w \sin \Psi_a] \quad (18) \end{aligned}$$

FEL – low gain 2. Order

- Berechnung der Veränderung der Phasendifferenz in 2. Ordnung

$$\Delta\Psi'_2 = \Delta\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)_2 \quad (19)$$

$$= \frac{k_L \Delta T}{T_0 \gamma^2} \frac{1}{8} \left(\frac{2eE_0 K}{\gamma k_L \Delta T^2} \right)^2 \quad (20)$$

$$\times \left(8 \frac{\gamma k_L \Delta T^2}{2eE_0 K} [\sin \Psi_a - \sin(\Delta\Psi_1 + \Delta\Psi_0 + \Psi_a)] \right. \\ \left. - [\sin \Psi_a - \sin(\Delta\Psi_0 + \Psi_a)]^2 \right)$$

FEL – low gain 2. order

- Im Low gain Bereich ist die Phasenänderung klein, so daß

$$\Delta\Psi_1 \ll 1$$

$$\Rightarrow \sin \Psi_a - \sin(\Delta\Psi_1 + \Delta\Psi_0 + \Psi_a)$$

$$\stackrel{\text{Taylor}}{\approx} \sin \Psi_a - \sin(\Delta\Psi_0 + \Psi_a) - \Delta\Psi_1 \cdot \cos(\Delta\Psi_0 + \Psi_a)$$

- Einsetzen in Gleichung (20) liefert zusammen mit dem Wert für $\Delta\Psi_1$ aus Gleichung (18) somit

$$\begin{aligned} \Delta\Psi_2' &= \frac{k_L \Delta T}{T_0 \gamma^2} \frac{1}{8} \left(\frac{2eE_0 K}{\gamma k_L \Delta T^2} \right)^2 \\ &\times \left\{ 8 \frac{\gamma k_L \Delta T^2}{2eE_0 K} [\sin(\Delta\Psi_0 + \Psi_a) - \sin(\Psi_a)] \right. \\ &+ 2 \cos(\Delta\Psi_0 + \Psi_a) [\cos \Psi_a - \cos(2w + \Psi_a) - 2w \sin \Psi_a] \\ &\left. - [\sin \Psi_a - \sin(\Delta\Psi_0 + \Psi_a)]^2 \right\} \end{aligned}$$

FEL – low gain 2. order

- Jetzt muß wieder über alle Anfangsphasen ψ_a gemittelt werden um alle Elektronen in einem Bunch zu berücksichtigen. Dabei erhält man dann

$$\langle \sin(\Delta\psi_0 + \psi_a) - \sin(\psi_a) \rangle = 0$$

$$\langle \cos^2(\Delta\psi_0 + \psi_a) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \cos(\Delta\psi_0 + \psi_a) \cos \psi_a \rangle = \frac{1}{2} \cos \Delta\psi_0$$

$$\langle \cos(\Delta\psi_0 + \psi_a) \sin \psi_a \rangle = -\frac{1}{2} \sin \Delta\psi_0$$

- Für die Änderung der Phasendifferenz in 2. Ordnung kann man dann schreiben

$$\langle \Delta\psi'_2 \rangle = \frac{e^2 E_L^2 K^2}{2\gamma^4 k_L T_0 \Delta T^3} \left(1 - \cos \Delta\psi_0 - \frac{\Delta\psi_0}{2} \cdot \sin \Delta\psi_0 \right)$$

FEL – low gain 2. Order

- Es war (Phasenshift in der 0. Ordnung)

$$\frac{k_L \Delta T}{\gamma^2 T_0} = \frac{\Delta \Psi_0}{L_u}$$

$\Delta \Psi_0$ ist also proportional zur Abweichung der kinetischen ΔT von der Resonanzenergie T_0

- Ersetzt man ΔT noch durch $\Delta \Psi_0$ so ergibt sich für den Verlauf der Verstärkung G

$$G \propto \langle \Delta \Psi'_2 \rangle \propto \frac{1}{\Delta \Psi_0^3} \left(1 - \cos \Delta \Psi_0 - \frac{\Delta \Psi_0}{2} \cdot \sin \Delta \Psi_0 \right)$$

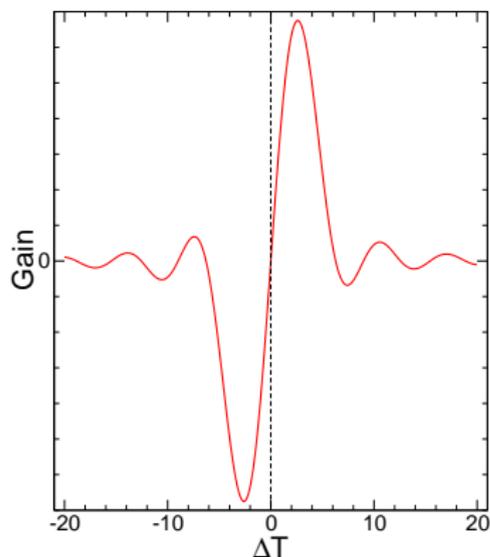
- Man kann leicht nachrechnen, dass gilt

$$\frac{d}{dw} \left(\frac{\sin w}{w} \right)^2 = -\frac{1}{w^3} (1 - \cos 2 \cdot w - w \cdot \sin 2 \cdot w)$$

FEL – low gain 2. Order

- Die Verstärkung kann dann in der Form

$$G \propto \langle \Delta \Psi'_2 \rangle \propto \frac{d}{dw} \left(\frac{\sin w}{w} \right)^2 \quad \text{mit } 2 \cdot w = \Delta \Psi_0$$



- Genau bei der Resonanzfrequenz $T = T_0$, $\Delta T = 0$ erfolgt keine Verstärkung
 - Elektronen müssen mit etwas höherer Energie in den FEL eintreten
 - bei kleineren Energien wird den Elektronen aus dem Laserfeld Energie zugeführt
- Teilchenbeschleuniger

FEL Theorie – Linearer Bereich

- Im folgenden soll nun der Bereich hoher Verstärkung (high Gain) und später der Bereich der Sättigung betrachtet werden.
- Beschreibung im Rahmen des Hamilton Formalismus
- Felder in complexer Schreibweise

$$\text{Undulator: } B_x + iB_y = B_u e^{-ik_u z}$$

$$\text{Laser: } E_x + iE_y = \tilde{E}_L(z) \exp\left(i\omega\left(\frac{z}{c} - t\right)\right)$$

Hamilton Funktion

$$\mathcal{H}(p_z, z, t) = \left[(p_z c + eA_z)^2 + e^2(\vec{A}_\perp + \vec{A}_u)^2 + m^2 c^4 \right]^{1/2} - e\Phi$$

$$\vec{A}_u = -\vec{e}_z \times \int \vec{H}_u dz \text{ Vectorpotential des Undulator}$$

- Verallgemeinerter Hamilton Formalismus
t ist kanonisch conjugiert zu $p_0 = -\mathcal{H}$
- kanonische Koordinaten $(p_0, p_z), (t, z)$

Hamilton Formalismus

- Transformation in ein angepasstes Koordinatensystem

$(P_0, P), (z, \psi)$ mit

$$P = -p_0/\omega = \frac{\mathcal{H}}{\omega} = \frac{T}{\omega}$$

$$P_0 = p_z + \frac{p_0}{\omega} \left(k_u + \frac{\omega}{c} \right)$$

$$\psi = k_u z + \omega \left(\frac{z}{c} - t \right)$$

- Damit hat die Hamilton Funktion die folgende Form

$$\tilde{\mathcal{H}}(P, \psi, z) = -P_0$$

$$\tilde{\mathcal{H}}(P, \psi, z) = \left(k_u + \frac{\omega}{c} \right) P - p_z(P, z, \psi)$$

$$= \left(k_u + \frac{\omega}{c} \right) P + eA_z/c - \frac{1}{c} \left[(P\omega + e\phi)^2 - e^2(\vec{A}_\perp + \vec{A}_u)^2 - m^2 c^4 \right]^{1/2}$$

Eichtransformation

- mit den kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P} \quad \text{und} \quad \frac{dP}{dz} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \psi}$$

- Vier Felder:

- 1 \vec{A}_U : Undulatorfeld
- 2 \vec{A}_\perp : Feld der Laserwelle
- 3 ϕ : Ladungsfeld der Elektronen

- Wahl einer Eichung χ für das Vectorpotential \vec{A}

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t}, \quad A_z \rightarrow A'_z = A_z + \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial z}$$

- Longitudinale Feldkomponente E_z bleibt damit unverändert

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial t}$$

Hamiltonfunktion

- Durch diese Wahl von χ verschwindet das Skalarpotential

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} c \int dt \phi(z, t) = \phi - \phi = 0$$

- Das Raumladungsfeld wird somit durch A_z beschrieben

$$E_z(z, t) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial A'_z}{\partial t} \leftrightarrow E_z(\psi, z) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial A'_z(z, \psi)}{\partial \psi}$$

- Die Hamiltonfunktion $\tilde{\mathcal{H}}$ lautet somit

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} = (k_u + \frac{\omega}{c}) \frac{T}{\omega} &- \frac{1}{c} \left\{ T^2 - e^2 (\vec{A}_\perp + \vec{A}_u)^2 - m^2 c^4 \right\}^{1/2} \\ &+ \frac{e}{\omega} \int d\psi E_z(z, \psi) \end{aligned}$$

- Im betrachteten linearen Bereich ist das Feld des Undulators \vec{A}_u viel größer als das Feld der Laserwelle \vec{A}_\perp

$$|\vec{A}_\perp| \ll |\vec{A}_u|$$

Hamiltonfunktion

- Damit kann die Wurzel um \vec{A}_\perp entwickelt werden

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{T^2 - e^2(\vec{A}_\perp + \vec{A}_u)^2 - m^2c^4} \\
 \cong & \sqrt{T^2 - e^2A_u^2 - m^2c^4} \\
 - & \frac{e^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{T^2 - e^2A_u^2 - m^2c^4}} (2\vec{A}_\perp + 2\vec{A}_u) \cdot \vec{A}_\perp + \dots \\
 = & \sqrt{T^2 - e^2A_u^2 - m^2c^4} - \frac{e^2}{\sqrt{T^2 - e^2A_u^2 - m^2c^4}} \vec{A}_u \cdot \vec{A}_\perp
 \end{aligned}$$

In der Entwicklung wurden alle Terme mit A_\perp^2 vernachlässigt

Hamiltonfunktion

- Einsetzen in die Hamiltonfunktion liefert somit

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} &= \frac{T}{\omega} \left(k_u + \frac{\omega}{c} \right) - \frac{1}{c} v \left\{ T^2 - e^2 A_u^2 - m^2 c^4 \right\}^{1/2} \\ &+ \frac{e^2}{c} \left\{ T^2 - e^2 A_u^2 - m^2 c^4 \right\}^{-1/2} (\vec{A}_u \cdot \vec{A}_\perp) + \frac{e}{\omega} \int d\psi E_z(z, \psi) \end{aligned}$$

- Wir wissen schon, daß der FEL Prozess ein Prozeß 2. Ordnung ist. Deshalb entwickeln wir die Hamiltonfunktion noch bis zur zweiten Ordnung in $T - T_0$, da die Energie des Elektronenstrahls nicht stark von der Resonanzenergie T_0 abweichen darf, um eine Verstärkung zu erzielen.

Hamiltonfunktion

- Entwickelte Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}} &= H(P, \psi, z) \\ &= C \cdot P + \frac{\omega}{2c\gamma_z^2 T_0} P^2 - (Ue^{i\psi} + U^*e^{-i\psi})\left(1 - \frac{P}{T_0}\right) + \int d\psi eE_z\end{aligned}\quad (21)$$

mit

$$P = T - T_0$$

$$C = k_u - \frac{\omega}{2c\gamma_z^2}$$

$$U = -\frac{ek_L \tilde{E}(z)}{2i\gamma}$$

$$\gamma_z^{-2} = \gamma^{-2} + \frac{K^2}{\gamma^2} = \frac{1}{\gamma^2}(1 + K^2)$$

U ist das ponderomotive Potential

Bewegung eines Ensembles

- Annahme:
Die Wechselwirkung eines Elektron mit dem kollektivem Feld, das von allen anderen Elektronen erzeugt wird (Strahlung und Raumladung), sei viel größer als die Wechselwirkung mit dem nächsten Nachbarn
- Entspricht einer *Mean field approximation*, wie sie z.B. aus der Atom- und Molekülphysik bekannt ist und zur Beschreibung von Mehrelektronensystemen angewandt wird.
- Sei $f(P, \psi, z)$ die Elektronenstrahlverteilungsfunktion
Dann gilt für diese die Liouville'sche Gleichung

$$[H, f] + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dt} = 0$$

- Kommutator ist definiert als

$$[u, v]_{p,q} := \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial q_k} \right)$$

Liouville'sche Gleichung

- Lösung über die Störungstheorie
- Sei

$$f = f_0 + \tilde{f}_1 e^{i\psi} + \tilde{f}_1^* e^{-i\psi} = f_0 + \tilde{f}_1 e^{i\psi} + C.C.$$
$$E_z = \tilde{E}_z e^{i\psi} + C.C.$$

mit

$f_0(P)$: Ungestörte Funktion

$\tilde{f}_1(P, z)$: kleine Störung $|\tilde{f}_1| \ll |f_0|$

Liouville'sche Gleichung

- Im P, ψ, z System lautet die Liouville'sche Gleichung somit

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial f}{\partial \psi} - \frac{\partial H}{\partial \psi} \frac{\partial f}{\partial P} = 0 \quad (22)$$

- Bedeutung:
 f ändert sich nicht entlang der Trajektorien außer durch die Wechselwirkung mit dem kollektivem Feld
- Lösung von (22) zusammen mit den Maxwell Gleichungen liefert die Lösung für das kollektive Feld und die Verteilungsfunktion f .

Störungstheorie

- Wir setzen jetzt Gleichung (21) (Hamiltonfunktion $H(P, \psi, z)$) in Gleichung (22) (Liouville'sche Gleichung) unter Verwendung der ebend definierten Funktion f ein. Das liefert nach einigen Umformungen

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial z} + i \left(C + \omega \frac{P}{c\gamma_z^2 T_0} \right) \tilde{f}_1 + (iU - e\tilde{E}_z) \frac{\partial f_0}{\partial P} = 0 \quad (23)$$

Hierbei sind Terme mit

$$U \frac{\tilde{f}_1}{T_0} \quad \text{und} \quad (iU - e\tilde{E}_z) \frac{d\tilde{f}_1}{dP}$$

relativ zu

$$(iU - e\tilde{E}_z) \frac{df_0}{dP}$$

zu vernachlässigen.

Anfangsbedingungen

- Zur Lösung der Gleichungen werden Anfangsbedingungen für den Elektronenstrahl benötigt. Diese werden so gewählt, daß der Strahl beim Eintritt in den Undulator ($z = 0$) weder in der Dichte noch in der Geschwindigkeit moduliert ist.

$$\tilde{f}_1|_{z=0} = 0$$

$$f_0 = n_0 \cdot F(P)$$

$$\int F(P) \cdot dP = 1$$

n_0 : Strahldichte

$F(P)$: normierte Dichteverteilungsfunktion

- ⇒ Lösung von Gleichung (23) mit diesen Anfangsbedingungen lautet dann

$$\tilde{f}_1 = -n_0 \frac{dF}{dP} \int_0^z dz' (iU - e\tilde{E}_z) \exp \left\{ i \left[C + \frac{\omega P}{c\gamma_z^2 T_0} \right] (z' - z) \right\} \quad (24)$$

Stromdichte

- Die Gleichung enthält wiederum das axiale Feld \tilde{E}_z , dass jetzt bestimmt werden soll.
- Die Stromdichte des Elektronenstrahls ist durch

$$\begin{aligned}
 j_z &= -ev_z \int f dP \\
 &= j_0 + \tilde{j}_1 e^{i\psi} + C.C.
 \end{aligned}$$

gegeben

- In der ultra-relativistischen Näherung $v_z \cong c$ gilt dann

$$\begin{aligned}
 \tilde{j}_1 &\cong -ec \int \tilde{f}_1 dP \\
 j_0 &= -ecn_0
 \end{aligned}$$

Stromdichte

- Wir betrachten nun die Maxwellsche Gleichung

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (25)$$

Das Feld \vec{E} und die Phasen sind gegeben durch

$$E_z = \tilde{E}_z e^{i\psi} + C.C. \quad \text{und} \quad \psi = k_u z + \omega \left(\frac{z}{c} - t \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial t} = \tilde{E}_z \frac{\partial}{\partial t} e^{i\psi} = -i\omega \tilde{E}_z e^{i\psi}$$

- Am Ort des Elektronenstrahls ist $\operatorname{rot}\vec{H} = 0$, so wird in der 1. dimensionalen Näherung Gleichung (25) zu

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = -i\omega \tilde{E}_z e^{i\psi} + C.C. = -4\pi \tilde{j}_1 e^{i\psi} + C.C.$$

$$\Rightarrow \tilde{E}_z = -\frac{i4\pi \tilde{j}_1(z)}{\omega} \quad (26)$$

Stromdichte

- Gleichung (26) können wir nun in Gleichung (24), welche die Modulation des Elektronenstrahl beschreibt einsetzen. Da

$$\tilde{j}_1 \cong -ec \int \tilde{f}_1 dP$$

war wird zudem noch über P integriert. Damit folgt dann

$$\begin{aligned} \tilde{j}_1 = & i \cdot j_0 \int_0^z dz' \left\{ U + \frac{4\pi e j_1(z')}{\omega} \right\} \\ & \times \int dP \frac{dF(P)}{dP} \exp \left\{ i \left[C + \frac{\omega P}{c\gamma_z^2 T_0} \right] (z' - z) \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

Dies ist eine Integro-Differentialgleichung, die den Elektronenstrom in dem 1. dimensionalen Modell beschreibt.

Vektorpotential

- Eine weitere Bedingung kann aus der Wellengleichung hergeleitet werden.
- Maxwell

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Die Eichung wurde so gewählt, dass $\phi = 0$ ist.

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

- Damit ist die Wellengleichung gleich

$$\Delta \vec{A} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Wellengleichung

- Das Vektorpotential ist durch die obige Eichung noch nicht genau bestimmt und wir können noch wählen $\text{div}\vec{A} = 0$

$$\Rightarrow -\Delta\vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

- mit $\vec{j} = 0$ ist dies die bekannte Wellengleichung
- Im FEL ist jedoch $\vec{j} \neq 0$, da der Elektronenstrahl vorhanden ist
- Es soll das elektromagnetische Feld des FEL betrachtet werden
 \Rightarrow nur \vec{A}_\perp ist relevant

$$\frac{\partial^2 \vec{A}_\perp}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_\perp}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_\perp \quad (28)$$

Wellengleichung

- Die transversale Stromdichte \vec{j}_\perp folgt aus der Geschwindigkeit \vec{v}_\perp . Für diese gilt

$$\frac{v}{c} = \frac{K}{\gamma} e^{-ik_u z}$$

$$\Rightarrow j_x + ij_y = \frac{K}{\gamma} e^{-ik_u z} [\tilde{j}_1 e^{i\psi} + C.C.]$$

- Lösungsansatz

$$A_{x,y} = \tilde{A}_{x,y} \exp\left(i\omega\left(\frac{z}{c} - t\right)\right) + C.C.$$

Wellengleichung

- Berechnung der Terme

$$\frac{\partial^2 \vec{A}_x}{\partial z^2} = \exp\left(i\omega\left(\frac{z}{c} - t\right)\right) \left\{ \frac{2i\omega}{c} \frac{\partial \tilde{A}_x(z)}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{A}_x(z)}{\partial z^2} - \tilde{A}_x(z) \frac{\omega^2}{c^2} \right\}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_x}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \tilde{A}_x(z) \exp\left(i\omega\left(\frac{z}{c} - t\right)\right) + C.C.$$

- Mit $\exp(-ik_U z) = \cos k_U z - i \sin k_U z$ folgt

$$\vec{j}_\perp = \frac{K}{\gamma} \begin{pmatrix} \cos k_U z \\ -\sin k_U z \end{pmatrix} (\tilde{j}_1 e^{i\psi} + C.C.)$$

- Einsetzen von $\vec{A}_{x,y}$ und \vec{j}_\perp in die Wellengleichung liefert dann

Wellengleichung

$$e^{i\omega\left(\frac{z}{c}-t\right)} \left\{ \frac{2i\omega}{c} \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_x \\ \tilde{\mathbf{A}}_y \end{pmatrix} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_x \\ \tilde{\mathbf{A}}_y \end{pmatrix} + C.C. \right\}$$

$$= -\frac{4\pi K}{c\gamma} \begin{pmatrix} \cos k_u z \\ -\sin k_u z \end{pmatrix} (\tilde{j}_1 e^{i\psi} + C.C.)$$

- Diese Gleichung muß jetzt wieder vereinfacht werden. Dazu macht man die folgenden Annahmen
 - 1 $\tilde{j}_1(z)$ ist eine langsame veränderliche Funktion auf der Skala der Undulatorperiode
 - 2 Die Länge z ist viel größer als die Undulatorperiode λ_u

Das bedeutet, dass man einen langen Undulator mit vielen Perioden betrachten muß und das sich von einer Periode zur nächsten der Elektronenstrahl nur wenig ändert.

Laser Feld

- Das bewirkt
 - 1 Die schnelle Oszillation $\cos k_U z$ und $\sin k_U z$ kann vernachlässigt werden
 - 2 die 2. Ableitung von $\tilde{A}_{x,y}$ wird vernachlässigt
- Damit wird die Gleichung zunächst zu

$$\exp\left(i\omega\left(\frac{z}{c} - t\right)\right) \left\{ \frac{2i\omega}{c} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{A}_{x,y} + C.C. \right\} = -\frac{4\pi K}{c\gamma} (\tilde{j}_1 e^{i\psi} + C.C.)$$

- Es ist

$$cE_{x,y} = -\frac{\partial A_{x,y}}{\partial t}$$

und mit dem gewähltem Ansatz für $A_{x,y}$

$$\frac{\partial A_{x,y}}{\partial t} = i\omega \tilde{A}_{x,y} \exp\left(i\omega\left(\frac{z}{c} - t\right)\right)$$

Laserfeld

- Damit kann dann die Wellengleichung letztendlich in der Form

$$\frac{d}{dz} \tilde{E}(z) = -\frac{2\pi K}{c\gamma} \tilde{j}_1(z) \quad (29)$$

geschrieben werden.

- Jetzt kann man noch $\tilde{j}_1(z)$, dass durch Gleichung (27) gegeben ist, einsetzen.

Laserfeld

- Damit ist dann das Laserfeld durch folgende Gleichung gegeben

$$\frac{d\tilde{E}}{dz} = \frac{\pi e j_0 K^2}{c \gamma^2} \int_0^z dz' \left\{ \tilde{E}(z') + i \frac{4c \gamma^2}{\omega K^2} \frac{\tilde{E}(z')}{dz'} \right\} \quad (30)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} dP \frac{dF(P)}{dP} \exp \left\{ i \left(C + \frac{\omega P}{c \gamma_z^2 T_0} \right) (z' - z) \right\}$$

$$\tilde{j}_1 = i j_0 \int_0^z dz' \left\{ U + \frac{4\pi e \tilde{j}_1(z')}{\omega} \right\}$$

$$\times \int dP \frac{dF(P)}{dP} \exp \left\{ i \left[C + \frac{\omega P}{c \gamma_z^2 T_0} \right] (z' - z) \right\}$$

- Dies ist jetzt eine weitere Integro-Differentialgleichung, die die Entwicklung des Laserfeld entlang der Undulatorachse beschreibt.

Variablen Definition

Verstärkungsparameter $\Gamma = \left(\frac{\pi j_0 K^2 \omega}{c \gamma_z^2 \gamma^3 I_A} \right)^{1/3}$

Alfven Strom $I_a = \frac{mc^3}{e} = 17 \text{ kA}$

$$\hat{z} = \Gamma \cdot z$$

Detuning Parameter $\hat{C} = C/\Gamma = \frac{1}{\Gamma} (k_u - \frac{\omega}{2c\gamma_z^2})$

Raumladungparameter $\hat{\Lambda}_\rho^2 = \Lambda_\rho^2 / \Gamma^2$

$$\Lambda_\rho^2 = \frac{4\pi j_0}{\gamma_z^2 \gamma I_A}$$

Normierter Energieübertrag $\hat{P} = \frac{T - T_0}{\rho T_0}$

Effizienzparameter $\rho = \frac{\gamma_z^2 \Gamma c}{\omega}$

Normiertes Laserfeld Gleichung

Die Gleichung für das Laserfeld hat damit die folgende Form

$$\frac{d\tilde{E}}{d\hat{z}} = \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' \left\{ \tilde{E}(\hat{z}') + i\hat{\Lambda}_p^2 \frac{d\tilde{E}(\hat{z}')}{d\hat{z}'} \right\} \quad (31)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P} \frac{d\hat{F}}{d\hat{P}} \exp \left\{ i(\hat{P} + \hat{C})(\hat{z}' - \hat{z}) \right\}$$

und

$$\int \hat{F}(\hat{P}) d\hat{P} = 1$$

Energieverteilung

- Beispiel Energieverteilungsfunktion $F(P)$
Gaussverteilung

$$F(T - T_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle (\Delta T)^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{(T - T_0)^2}{2 \langle (\Delta T)^2 \rangle}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{F}(\hat{P}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \Lambda_T^2}} \exp\left(-\frac{\hat{P}^2}{2\Lambda_T^2}\right)$$

$$\Lambda_T^2 = \frac{\langle (\Delta T)^2 \rangle}{\rho^2 T_0^2}$$

- Es wurden bisher verschiedenen Näherungen gemacht, um die Gleichung (31) herzuleiten. Wann ist die Gleichung aber überhaupt gültig ?

Gültigkeitsbereich

- Annahme war, daß $\tilde{E}(z)$ und $\tilde{j}(z)$ langsam veränderliche Funktionen sind. Das bedeutet

$$\Gamma \left| \frac{d\tilde{E}}{d\hat{z}} \right| \ll k_u |\tilde{E}| \Leftrightarrow \left| \frac{d\tilde{E}}{dz} \right| \ll k_u |\tilde{E}|$$

$$\Gamma \left| \frac{d\tilde{j}}{d\hat{z}} \right| \ll k_u |\tilde{j}_1| \quad \text{da } \hat{z} = \Gamma \cdot z$$

- Für den Effizienzparameter ρ gilt dann

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\gamma_z^2 c}{\omega} \Gamma \\ &= \frac{\gamma_z^2}{k_L} \cong \frac{\Gamma}{k_u} = \frac{K}{k_u \gamma_z} \left(\frac{\pi j_0 \omega}{c \gamma^3 I_A} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho \left| \frac{d\tilde{E}}{d\hat{z}} \right| \ll |\tilde{E}|$$

Gültigkeitsbereich

- Insgesamt läßt sich zeigen, daß im Rahmen der durchgeführten Näherungen

$$\left(\rho, \rho \hat{\Lambda}_T, \rho \hat{\Lambda}_P, \rho \hat{C} \right) \ll 1$$

gelten muß.

- Damit erhält man dann die Bedingung

$$\rho = \frac{\gamma_Z^2 c}{\omega} \Gamma \cong \frac{\pi j_0 K^2}{k_u^2 \gamma I_A} \ll 1$$

Lösung der Laserfeld Gleichung

- Die Gleichung (31)

$$\frac{d\tilde{E}}{d\hat{z}} = \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' \left\{ \tilde{E}(\hat{z}') + i\hat{\Lambda}_p^2 \frac{d\tilde{E}(\hat{z}')}{d\hat{z}'} \right\} \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P} \frac{d\hat{F}}{d\hat{P}} \exp \left\{ i(\hat{P} + \hat{C})(\hat{z}' - \hat{z}) \right\}$$

soll nun gelöst werden.

- Definition der Laplace Transformation

$$\tilde{E}(p) = \int_0^{\infty} d\hat{z} \exp(-p\hat{z}) \tilde{E}(\hat{z})$$

- Multiplikation von Gleichung (31) mit $\exp(-p\hat{z})$ ($\text{Re} p > 0$) und Integration über \hat{z} von 0 bis ∞ .

Lösung der Laserfeld Gleichung

- Linke Seite von Gleichung 31

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{d\tilde{E}(\hat{z})}{d\hat{z}} \exp(-p\hat{z}) d\hat{z} &= \tilde{E}(\hat{z}) \exp(-p\hat{z}) \Big|_0^{\infty} \\ &\quad - \int_0^{\infty} \tilde{E}(\hat{z}) (-p) \exp(-p\hat{z}) d\hat{z} \\ &= -\tilde{E}(0) + p\tilde{E}(p) \\ &= p\tilde{E}(p) - E_{\text{ext}} \end{aligned}$$

Lösung der Laserfeld Gleichung

- Rechte Seite der Gleichung

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\infty d\hat{z} \cdot e^{-\rho\hat{z}} \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' \left\{ \tilde{E}(\hat{z}') + i\hat{\Lambda}_p^2 \frac{d\tilde{E}(\hat{z}')}{d\hat{z}'} \right\} \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^\infty d\hat{P} \frac{d\hat{F}}{d\hat{P}} \exp \left\{ i(\hat{P} + \hat{C})(\hat{z}' - \hat{z}) \right\} \\
 &= \left\{ \tilde{E}(p) + i\hat{\Lambda}_p^2 (p\tilde{E}(p) - \tilde{E}_{\text{ext}}) \right\} \int_{-\infty}^\infty d\hat{P} \frac{\frac{d\hat{F}}{d\hat{P}}}{p + i(\hat{P} + \hat{C})}
 \end{aligned}$$

Lösung der Laserfeld Gleichung

- mit

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty d\hat{z} \exp(-p\hat{z}) \left\{ \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' \tilde{E}(\hat{z}') \exp \left[i(\hat{P} + \hat{C})(\hat{z}' - \hat{z}) \right] \right\} \\
 = & \int_0^\infty d\hat{z}' \tilde{E}(\hat{z}') \exp \left[i(\hat{P} + \hat{C})\hat{z}' \right] \cdot \int_{\hat{z}'}^\infty d\hat{z} \exp \left[-(p + i\hat{P} + i\hat{C})\hat{z} \right] \\
 = & \frac{\tilde{E}(p)}{p + i(\hat{P} + \hat{C})}
 \end{aligned}$$

Lösung der Laserfeld Gleichung

- Mit der Definition

$$\hat{D} = \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P}' \frac{d\hat{F}}{d\hat{P}} \frac{1}{p + i(\hat{P} + \hat{C})} \quad (32)$$

wird Gleichung (31) dann zu

$$p\tilde{E}(p) - E_{\text{ext}} = \left\{ \tilde{E}(p) + i\hat{\Lambda}_p^2 (p\tilde{E}(p) - \tilde{E}_{\text{ext}}) \right\} \cdot \hat{D}$$

Lösung der Laserfeld Gleichung

- Umschreiben

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad p\tilde{E}(p) - \tilde{E}(p)\hat{D} - i\hat{\Lambda}_p^2 p\tilde{E}(p)\hat{D} &= E_{\text{ext}} - i\hat{\Lambda}_p^2 E_{\text{ext}}\hat{D} \\ &= E_{\text{ext}} \left(1 - i\hat{\Lambda}_p^2 \hat{D} \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{E}(p) \left(p - \hat{D} - i\hat{\Lambda}_p^2 \hat{D} p \right) = E_{\text{ext}} \left(1 - i\hat{\Lambda}_p^2 \hat{D} \right)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{E}(p) = E_{\text{ext}} \frac{1 - i\hat{\Lambda}_p^2 \hat{D}}{p - \hat{D} - ip\hat{\Lambda}_p^2 \hat{D}}$$

$$\Rightarrow \tilde{E}(p) = E_{\text{ext}} \left[p - \frac{\hat{D}}{1 - i\hat{\Lambda}_p^2 \hat{D}} \right]$$

Lösung der Laserfeld Gleichung

- Benötigt wird jetzt die Feldamplitude $\tilde{E}(\hat{z})$, die mit der inversen Laplace Transformation berechnet werden kann

$$\begin{aligned}\tilde{E}(\hat{z}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha' - i\infty}^{\alpha' + i\infty} d\lambda \tilde{E}(\lambda) \exp(\lambda \hat{z}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha' - i\infty}^{\alpha' + i\infty} d\lambda \exp(\lambda \hat{z}) \left[\lambda - \frac{\hat{D}(\lambda)}{1 - i\hat{\Lambda}_p^2 \hat{D}(\lambda)} \right] \quad (33)\end{aligned}$$

$\alpha' > 0$ reell und größer als alle Polstellen des Integranden. Die Integration erfolgt parallel zur imaginären Achse.

- Wir wollen zunächst den einfach Fall eines kalten Elektronenstrahls betrachten. Das heißt, das es eine scharfe Verteilung der Elektronenenergie gibt und somit die Verteilungsfunktion die folgende Form hat

$$\hat{F}(\hat{P}) = \delta(\hat{P})$$

FEL – Kalter Elektronenstrahl

- Für die Funktion (32) läßt sich dann schreiben

$$\begin{aligned}
 \hat{D}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P} \frac{\hat{F}'(\hat{P})}{\lambda + i(\hat{P} + \hat{C})} \\
 &= \underbrace{\frac{\hat{F}(\hat{P})}{\lambda + i(\hat{P} + \hat{C})} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P} \frac{\hat{F}(\hat{P}) \frac{d}{d\hat{P}}(\lambda + i(\hat{P} + \hat{C}))}{[\lambda + i(\hat{P} + \hat{C})]^2} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P} \frac{i\delta(\hat{P})}{[\lambda + i(\hat{P} + \hat{C})]^2} \\
 &= i(\lambda + i\hat{C})^{-2}
 \end{aligned}$$

Lösung der Laserfeld Gleichung

- Damit ist das Feld aus Gleichung (31) durch

$$\tilde{E}(\hat{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha' - i\infty}^{\alpha' + i\infty} d\lambda \exp(\lambda \hat{z}) \left[\lambda - \frac{i}{(\lambda + i\hat{C})^2 + \hat{\Lambda}_p^2} \right]^{-1} \quad (34)$$

gegeben

- Wie läßt sich diese Gleichung jetzt lösen ?

FEL – Kalter Elektronenstrahl

- Wenn der Faktor vor der $\exp(\lambda \hat{z})$ -Funktion das Jordan'sche Lemma erfüllt kann das Integral mittels des Cauchy'sches Residuum Theorem als eine Summe über Partialwellen geschrieben werden.

$$\left[\lambda - \frac{\hat{D}}{1 - i\hat{\Lambda}_p^2 \hat{D}} \right]^{-1} = \left[\lambda - \frac{i}{(\lambda + i\hat{C}^2) + \hat{\Lambda}_p^2} \right]^{-1} \quad (35)$$

- Das Jordan Lemma sagt aus, daß das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx$$

0 ist, wenn für die Funktion $f(x)$ gilt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |f(R \cdot e^{i\theta})| = 0.$$

- Der Faktor (35) ist von der Ordnung $O(\lambda^{-1})$, so daß für $|\lambda| \rightarrow \infty$ das Jordan Lemma erfüllt ist.

FEL – Kalter Elektronen Strahl

- Damit kann das Integral (34) in eine Reihe

$$\tilde{E}(\hat{z}) = E_{\text{ext}} \sum_j \exp(\lambda_j \hat{z}) \left[\lambda - \frac{\hat{D}'_j}{1 - i\hat{\Lambda}_p^2 \hat{D}_j} \right]^{-1} \quad (36)$$

umgeschrieben werden, wobei

$$\hat{D}_j = \hat{D}|_{\lambda=\lambda_j} \quad \text{und} \quad \hat{D}'_j = \left. \frac{d\hat{D}}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_j}$$

sind und λ_j die Lösungen von

$$\lambda - \frac{\hat{D}'_j}{1 - i\hat{\Lambda}_p^2 \hat{D}_j} = 0$$

sind.

FEL – Kalter Elektronenstrahl

- Für den kalten Elektronenstrahl gilt somit

$$\tilde{E}(\hat{z}) = E_{\text{ext}} \sum_j \frac{\exp(\lambda_j \hat{z})}{1 - 2i(\lambda_j + i\hat{C})\lambda_j^2} \quad (37)$$

$$\lambda = i \left[(\lambda + i\hat{C})^2 + \hat{\Lambda}_p^2 \right]^{-1} \quad (38)$$

- Die λ_j sind somit die Lösung einer kubischen Gleichung. Für die Lösungen dieser kubischen Gleichung gilt

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = i$$

$$\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3 = -\hat{C}^2 + \hat{\Lambda}_p^2$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -2i\hat{C}$$

FEL – Kalter Elektronenstrahl

- Einsetzen dieser Bedingungen in Gleichung (37) und Umformen liefert dann

$$\frac{\tilde{E}(\hat{z})}{E_{\text{ext}}} = \frac{\lambda_2 \lambda_3 \exp(\lambda_1 \hat{z})}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{\lambda_1 \lambda_3 \exp(\lambda_2 \hat{z})}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \exp(\lambda_3 \hat{z})}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \quad (39)$$

- Es soll nun der Fall eines sehr kleinen Raumladungsfeld $\hat{\Lambda}_p^2 \rightarrow 0$ direkt in der Resonanzposition $\hat{C} = 0$ betrachtet werden. Dann wird Gleichung (38) zu

$$\lambda = i\lambda^{-2} \Leftrightarrow \lambda^3 = i$$

FEL – Kalter Elektronenstrahl

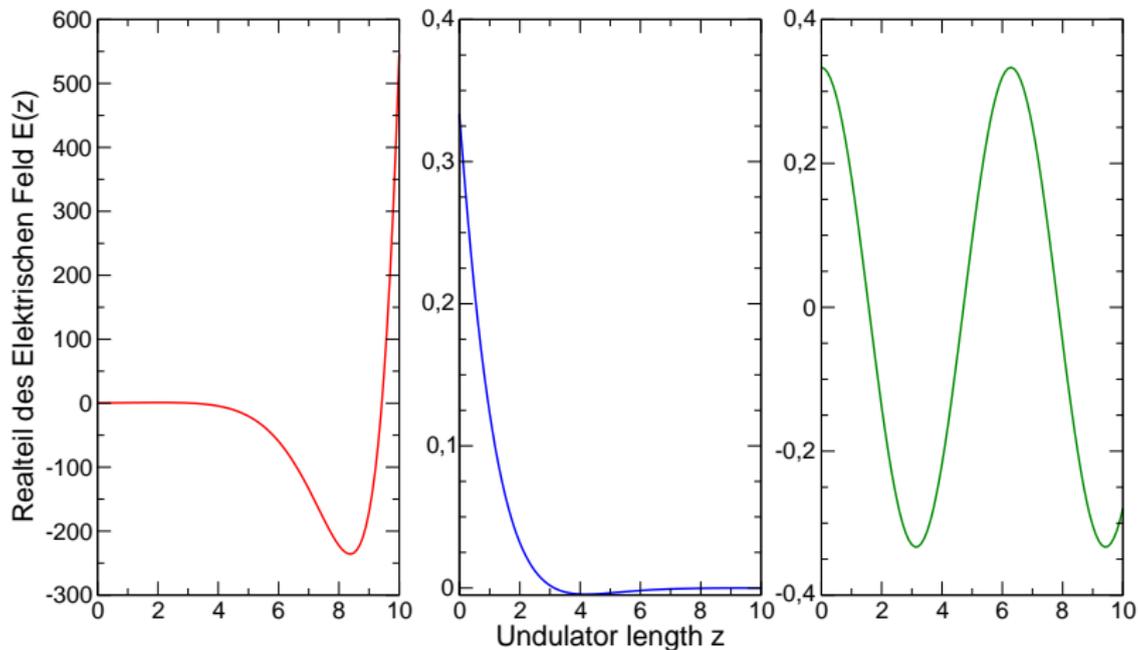
- Lösungen sind

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -i \\ \lambda_2 &= \frac{\sqrt{3} + i}{2} \\ \lambda_3 &= \frac{-\sqrt{3} + i}{2}\end{aligned}$$

- Für das Feld erhält man damit die folgende Lösung

$$\frac{\tilde{E}(\hat{z})}{E_{\text{ext}}} = \frac{1}{3} \left[\exp\left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \hat{z}\right) + \exp\left(\frac{-\sqrt{3} + i}{2} \hat{z}\right) + \exp(-i\hat{z}) \right]$$

FEL – Feld im linearen Bereich

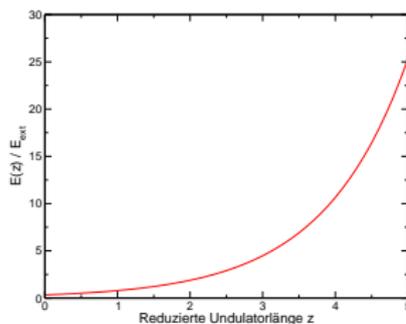


FEL – Feld im linearen Bereich

- Der 3. Term oszilliert und der 2. Term nimmt exponentiell ab. Für den asymptotischen Fall $\hat{z} > 1$ wird die Gleichung somit zu

$$\frac{\tilde{E}(\hat{z})}{E_{\text{ext}}} = \frac{1}{3} \exp\left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \hat{z}\right)$$

- Mit zunehmender reduzierter Undulatorlänge \hat{z} nimmt das elektrische Feld $\tilde{E}(\hat{z})$ also exponentiell zu! Verstärkung!



$$G = \frac{|\tilde{E}|^2}{E_{\text{ext}}^2}$$

$$= \frac{1}{9} \left[1 - 4 \cosh \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{z} \left(\cosh \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{z} + \cos \frac{3}{2} \hat{z} \right) \right]$$

FEL – Verstärkungsverhalten

- Im Gegensatz zum low Gain Bereich verstärkt der FEL im linearen Bereich direkt bei der Resonanzenergie $\hat{C} = 0$
- Im folgenden soll nun das Verstärkungsverhalten des FEL diskutiert werden.

Dazu nehmen wir wieder zunächst ein verschwindendes Raumladungsfeld an $\hat{\Lambda}_p^2 \rightarrow 0$. Damit wird Gleichung (35) zu

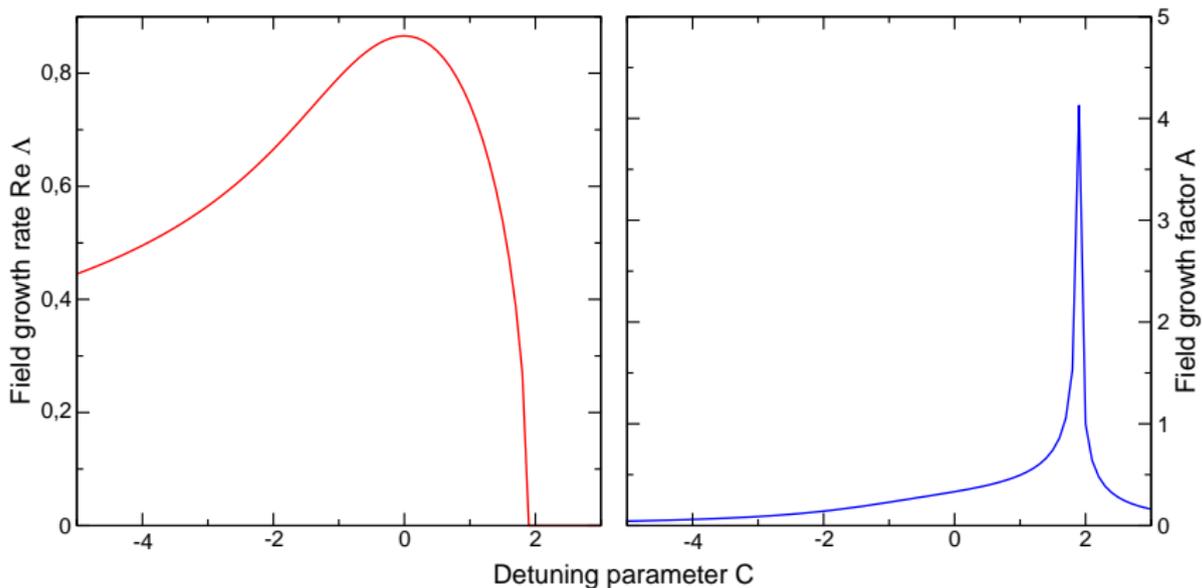
$$\lambda(\lambda + i\hat{C})^2 = i$$

- Die Propagationskonstanten λ_j hängen somit nur vom Detuning Parameter \hat{C} ab. Lösung läßt sich im Prinzip explizit aufschreiben, wir wollen aber nur das Verhalten betrachten.
- $\hat{\Lambda}$ sei die Lösung λ_j , die dem exponentiellen Wachstum der Leistung entspricht
- Damit kann die Verstärkung dann einfach in der Form

$$G = A \cdot \exp(2\text{Re}\hat{\Lambda}\hat{z})$$

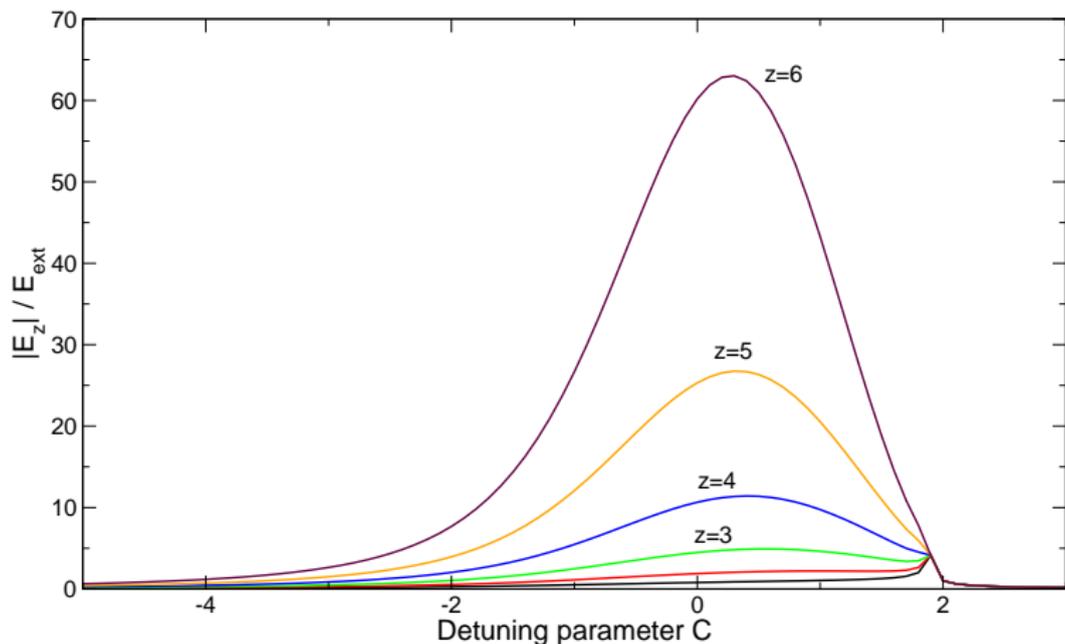
FEL – Verstärkungsverhalten

- $\hat{\Lambda}$: Field growth rate
- A : Input coupling factor



FEL – Verstärkungsverhalten

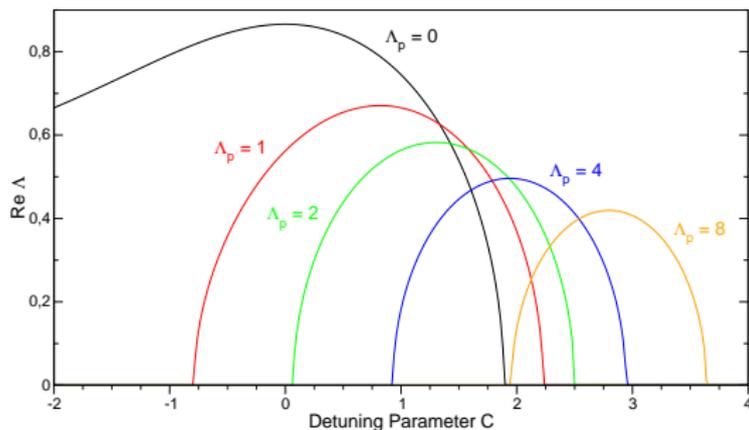
- Verstärkung des Feldes $\tilde{E}(\hat{z})$ bei verschiedenen Längen \hat{z} des Undulators



FEL – Verstärkungsverhalten

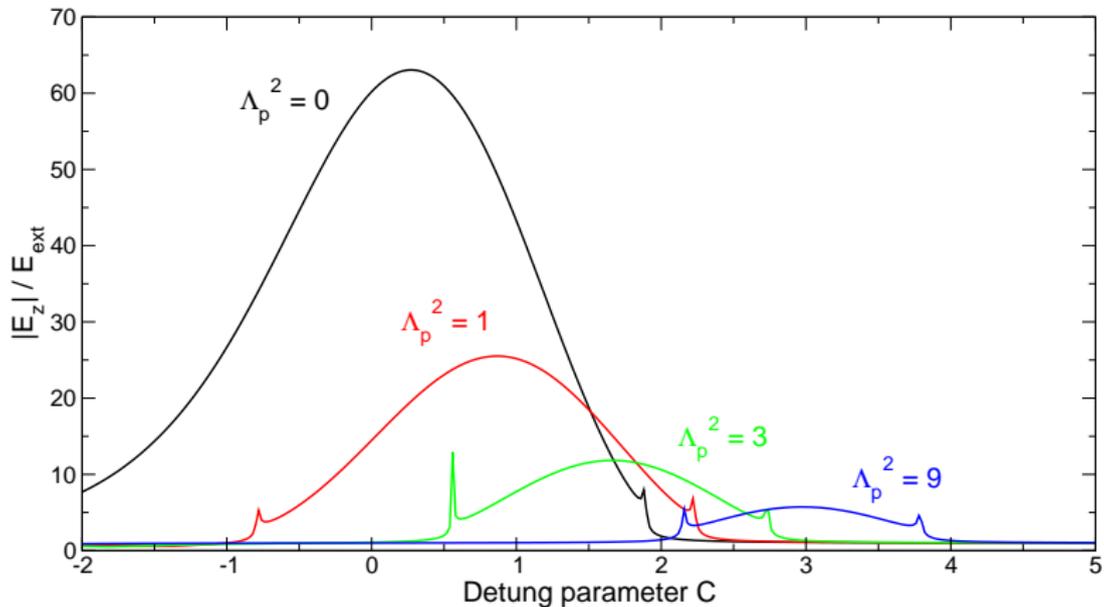
- Welchen Einfluß hat nun eine Raumladung $\hat{\Lambda}_p^2 > 0$ auf das Verstärkungsverhalten ?
- Dazu muß Gleichung (39) mit den korrekten Werten für die Eigenwerte der Gleichung (38) berechnet werden.

$$\lambda = i \left[(\lambda + i\hat{C})^2 + \hat{\Lambda}_p^2 \right]^{-1}$$



FEL – Verstärkungsverhalten

- Für große Raumladungsfelder $\hat{\Lambda}_p^2$ wird somit die Verstärkung stark unterdrückt



FEL – Verstärkungsverhalten

- Das Maximum der Field growth rate $Re\hat{\Lambda}$ läßt sich durch

$$\max(Re\hat{\Lambda}) \cong \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{\hat{\Lambda}_p^2}{3} \right)$$

beschreiben. Das Maximum selbst wird bei einem Detuning Parameter

$$\hat{C}_m \cong \hat{\Lambda}_p$$

erreicht.

FEL – Verstärkungsverhalten

- Es soll jetzt als letzter Schritt der Einfluß einer Energieverteilung des Elektronenstrahls diskutiert werden. Bis jetzt wurde ein kalter Elektronenstrahl angenommen.
- Realistische Verteilung ist eine Gaussverteilung der Energie

$$\hat{F}(\hat{P}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\Lambda}_T^2}} \exp\left(-\frac{\hat{P}^2}{2\hat{\Lambda}_T^2}\right)$$

mit der Breite $\hat{\Lambda}_T^2$ der Verteilung.

- Das Feld ist durch Gleichung (33)

$$\tilde{E}(\hat{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha' - i\infty}^{\alpha' + i\infty} d\lambda \exp(\lambda \hat{z}) \left[\lambda - \frac{\hat{D}(\lambda)}{1 - i\hat{\Lambda}_p^2 \hat{D}(\lambda)} \right]$$

gegeben

FEL – Verstärkungsverhalten

- mit \hat{D}

$$\hat{D}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P} \frac{\hat{F}'(\hat{P})}{\lambda + i(\hat{P} + \hat{C})}.$$

- Die Rechnung soll jetzt hier nicht ausgeführt werden, sie ist z.B. in dem Buch von Saldin durchgeführt.

Das Ergebnis für das Feld im Fall einer Gaussverteilung der Elektronenenergie lautet

$$\frac{\tilde{E}(\hat{z})}{E_{\text{ext}}} = \exp(\hat{\Lambda}\hat{z}) \times \left\{ 1 + i(i - \hat{\Lambda}_p^2 \hat{\Lambda})^2 \left[\left(\frac{\hat{\Lambda}}{i - \hat{\Lambda}_p^2 \hat{\Lambda}} - \frac{1}{\hat{\Lambda}_T^2} \right) \right. \right. \quad (40)$$

$$\times \left. \left. \left(\frac{1}{\hat{\Lambda} + i\hat{C}} - \frac{\hat{\Lambda} + i\hat{C}}{\hat{\Lambda}_T^2} \right) + \frac{\hat{\Lambda} + i\hat{C}}{\hat{\Lambda}_T^4} \right] \right\}^{-1}$$

FEL – Verstärkungsverhalten

- wobei $\hat{\Lambda}$ die Eigenwerte der Gleichung

$$\hat{D}(\hat{\Lambda}) = \frac{\hat{\Lambda}}{1 + i\hat{\Lambda}_p^2 \hat{\Lambda}}$$

sind mit

$$\hat{D} = \frac{i}{\hat{\Lambda}_T^2} - \frac{i\sqrt{\pi/2}}{\hat{\Lambda}_T^3} (\lambda + i\hat{C}) \exp\left[\frac{(\lambda + i\hat{C})^2}{2\hat{\Lambda}_T^2}\right] \times \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{(\lambda + i\hat{C})}{\sqrt{2}\hat{\Lambda}_T}\right)\right]$$

und der Fehlerfunktion

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x du \exp(-u^2)$$

FEL – FEL – Verstärkungsverhalten

- Wir wollen hier jetzt nur wieder den Fall eines verschwindenden Raumladungsfeld $\hat{\Lambda}_p^2 \rightarrow 0$ kurz diskutieren
- Für diesen Fall wird Gleichung (40) zu

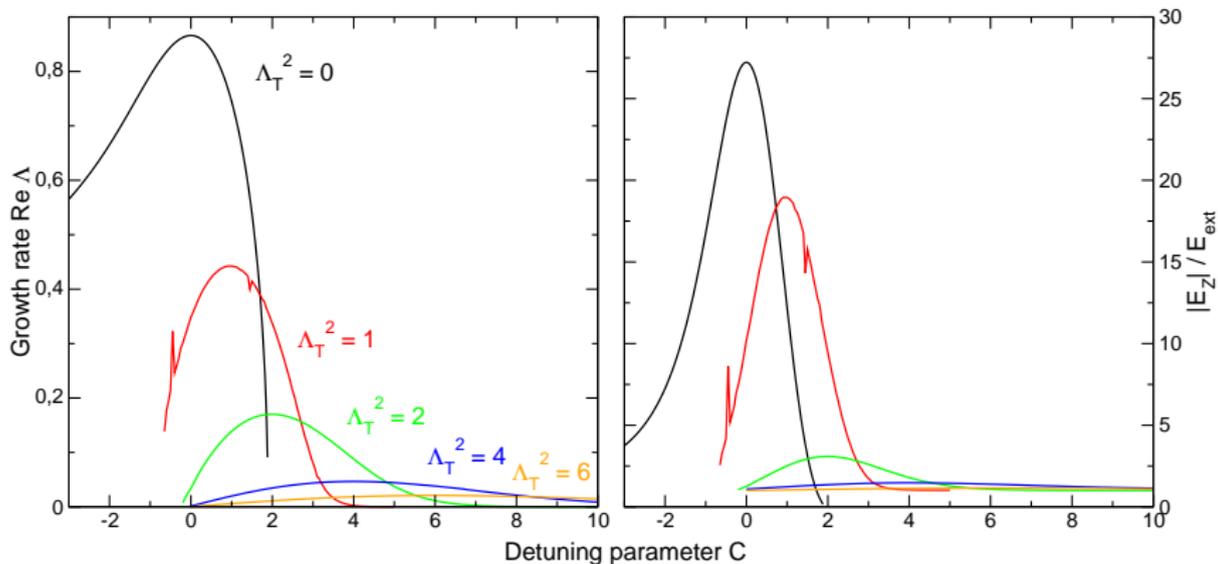
$$\frac{\tilde{E}(\hat{z})}{E_{\text{ext}}} = \frac{\hat{\Lambda}_T^2 (\hat{\Lambda} + i\hat{C})}{i(\hat{C}\hat{\Lambda}_T^2 + 1) - \hat{\Lambda}(\hat{\Lambda} + i\hat{C})^2} \exp(\hat{\Lambda}\hat{z})$$

und $\hat{\Lambda}$ ist die Lösung der Eigenwertgleichung

$$\hat{\Lambda} = i \int_0^{\infty} dx \cdot x \cdot \exp\left(-\hat{\Lambda}_T^2 x^2 / 2 - (\hat{\Lambda} + i\hat{C})x\right)$$

FEL – Verstärkungsverhalten

- Growth rate und Feld des FEL bei verschiedenen Energieverteilungen des Elektronenstrahls



Der Sättigungsbereich

- Im diskutierten low und high Gain Bereich hängen die Ausgangsleistung und die eingekoppelte Leistung linear zusammen
- Überschreitet die eingekoppelte Leistung W_{ext} einen bestimmten Wert, nimmt die Leistung nicht mehr linear zu und erreicht irgendwann die Sättigung – dieser Bereich wird dann als nicht linearer oder Sättigungsbereich bezeichnet
- Im Sättigungsbereich lassen sich keine analytischen Lösungen mehr finden und das Problem muß numerisch gelöst werden
- Es soll im folgenden die prinzipielle Methode zur Lösung beschrieben werden und deren Ergebnisse diskutiert werden.

FEL Parameter

- Der FEL Verstärker kann durch die folgenden Parameter beschrieben werden

l_u Länge des Undulators

k_u Undulatorwellenzahl

H_u Magnetfeld des Undulators

ω Frequenz der FEL Strahlung

T_0 Nomienelle Energie des Elektronenstrahl

j_0 Elektronenstromdichte am Anfang des Undulator

$\langle \Delta T^2 \rangle$ Energieverteilung des Elektronenstrahl

E_{ext} Amplitude des eingekoppelten Master Signals

- Wir nehmen im folgenden als Energieverteilung eine Gaussverteilung an

FEL Parameter

- Durch die Wahl von geeigneten dimensionslosen Variablen, kann die Beschreibung auf 6 Parameter reduziert werden.

$$\hat{I}_u = \Gamma I_u$$

Länge des Undulators

$$\hat{C}$$

Detuning Parameter

$$\hat{\Lambda}_p^2$$

Raumladungparameter

$$\hat{\Lambda}_T^2$$

Energieverteilung des Elektronenstrahl

$$\hat{\rho}$$

Effizienzparameter

$$\hat{E}_{\text{ext}} = E_{\text{ext}}/E_0 = \frac{eKE_{\text{ext}}}{\rho T_0 \Gamma \gamma}$$

Normierte Master Amplitude

- Für den linearen Bereich reichen sogar

$$\hat{I}_u, \hat{C}, \hat{\Lambda}_p^2, \text{ und } \hat{\Lambda}_T^2$$

aus.

Der Sättigungsbereich – Hamiltonfunktion

- Aufgrund der verschiedenen Näherungen, die wir gemacht haben, muß für den Effizienzparameter

$$\rho \ll 1$$

gelten.

- Wenn ρ sehr klein ist, wird das FEL Feld \tilde{E}_{out} nicht mehr von ρ abhängen und somit erhält man

$$\tilde{E}_{\text{out}} = \mathcal{D}(\hat{I}_u, \hat{C}, \hat{\Lambda}_\rho^2, \hat{\Lambda}_T^2, \hat{E}_{\text{ext}})$$

- Im Bereich der Sättigung wird die Ausgangsamplitude E_{out} nicht mehr von \hat{I}_u und \hat{E}_{ext} abhängen, so daß dort dann gelten wird

$$\tilde{E}_{\text{sat}} = \mathcal{D}(\hat{C}, \hat{\Lambda}_\rho^2, \hat{\Lambda}_T^2)$$

FEL Verhalten im Sättigungsbereich

- Der Elektronenstrahl wird durch N Makropartikel pro Interval $(0, 2\pi)$ über die Phase ψ simuliert. Die reduzierte Stromdichte ist periodisch in der Phase und ergibt sich zu

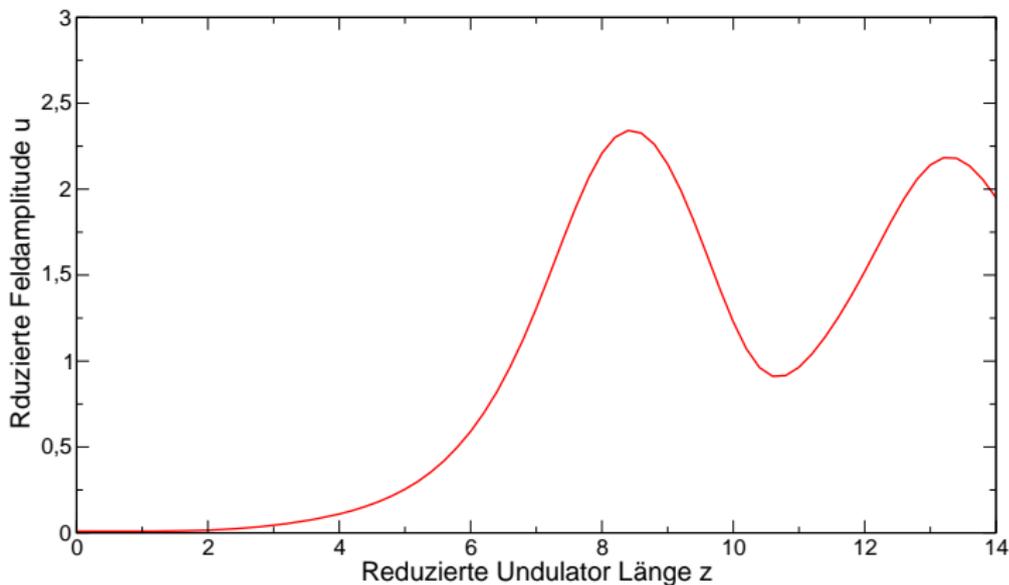
$$\hat{j}_z = -\frac{2\pi}{N} \sum_{j=1}^N \delta(\psi - \psi_{(j)}), \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi$$

$$\hat{j}_z(\psi + 2\pi \cdot n, z) = \hat{j}_z(\psi, z)$$

- Damit hat man dann $2N + 2$ Gleichungen, die den Verstärkungsprozess beschreiben.
- Wie sehen die Lösungen dieser numerischen Simulationen aus ?

FEL Verhalten im Sättigungsbereich

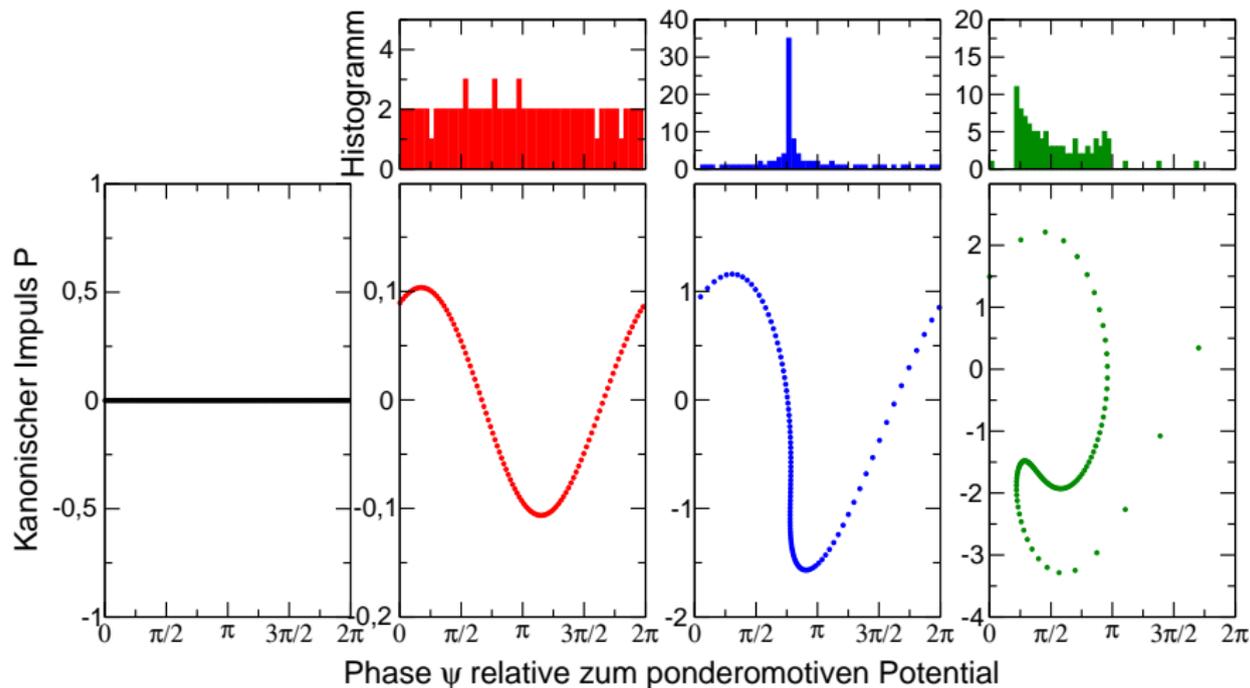
- Reduzierte Feldamplitude \hat{u} in Abhängigkeit von der reduzierten Undulatorlänge \hat{z} ($\hat{C} = 0, \hat{\Lambda}_p^2 \rightarrow 0, \hat{\Lambda}_T^2 = 0, \hat{u}_{\text{ext}} = 0.1$)



Sättigungsbereich

- Das Feld \hat{u} steigt bis zu einem Maximalwert an und fällt dann wieder ab.
- Im Maximum ist der Elektronenbunch vollständig durchmoduliert
- Für einen längeren Undulator fallen ein Teil der Elektronen in die Beschleunigungsphase des ponderomotiven Potentials und es wird wieder Energie aus dem FEL Feld an den Elektronenstrahl übertragen.
- Das Verhalten läßt sich gut im Phasenraum $(\hat{P}, \Delta\psi)$ betrachten. $\Delta\psi = \psi + \psi_0$ ist die Phase relativ zur Phase ψ_0 des ponderomotiven Potentials.

FEL – Phasenraum



FEL – Phasenraum

- 1 Unmodulierter Strahl am Eingang des Undulators ($\hat{z} = 0$)
- 2 Verteilung im linearen Bereich ($\hat{z} = 4$)
- 3 Kurz vor dem Sättigungsbereich ($\hat{z} = 7$)
- 4 Sättigung ($\hat{z} = 8.4$)

Der SASE Prozess

- Bis jetzt wurde immer nur der Fall eines Verstärkers betrachtet, bei dem ein externes Feld E_{ext} eingekoppelt und dieses dann im Undulator bis zur Sättigung verstärkt wird. Woher erhalten wir aber ein geeignetes, externes Feld ?
- Das Feld kann in dem Undulator selbst in Form von spontan emittierter Synchrotronstrahlung erzeugt werden. Ein FEL Verstärker, der in diesem Modus betrieben wird, wird als **SASE FEL** bezeichnet

SASE: Self-amplified spontaneous emission

- Ursache der Synchrotronstrahlung sind Dichtefluktuationen im Elektronenstrahl, die durch das **Shot Noise (Schrotrauschen)** beschrieben werden.
- Beschreibung der Statistik des Elektronenstrahls

Schrotrauschen des Elektronenstrahls

- Der Elektronenstrahl besteht aus einer großen Zahl N von Elektronen und kann durch

$$I(t) = -e \sum_{k=1}^N \delta(t - t_k)$$

beschrieben werden. t_k ist die zufällige Ankunftszeit eines Elektrons e am Undulatoreingang.

- Die Mittlere Verteilung entspricht dem Elektronenbunchprofil und ist durch

$$\langle I(t) \rangle = -e \cdot N \cdot F(t)$$

gegeben.

- Für ein Gaussprofil wäre

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_T} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_T^2}\right)$$

Schrotrauschen des Elektronenstrahls

- Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron in der Zeit $t, t + dt$ am Undulatoreingang ankommt ist genau $F(t)$
- Wir definieren die Fouriertransformierte

$$\bar{I}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} I(t) e^{i\omega t} dt = -e \sum_{k=1}^N e^{i\omega t_k}$$

$$I(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{I}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = -e \sum_{k=1}^N \delta(t - t_k)$$

- Die Fouriertransformierte $\bar{I}(\omega)$ kann somit als die Summe einer großen Zahl von komplexen Phasen mit dem zufälligen Wert $\phi_k = \omega t_k$ beschrieben werden.

Schrotrauschen des Elektronenstrahls

- Sei nun die Dauer des Elektronbunches σ_T so lang, das

$$\omega \cdot \sigma_T \gg 1$$

ist. Dann können die Phasen als gleichmäßig über das Intervall $(0, 2\pi)$ verteilt betrachtet werden.

- In diesem Fall kann der Zentrale Grenzwertsatz angewandt werden und das bedeutet, daß der Real und der Imaginäranteil von $\bar{I}(\omega)$ normalverteilt sind.

$$p(\text{Re}\bar{I}(\omega)) = \frac{1}{\langle \text{Re}\bar{I}(\omega) \rangle} \exp\left(-\frac{\text{Re}\bar{I}(\omega)^2}{\langle \text{Re}\bar{I}(\omega) \rangle}\right)$$

Korrelationsfunktionen

- Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Verteilung $|\bar{I}(\omega)|^2$ hat damit die Form

$$p(|\bar{I}(\omega)|^2) = \frac{1}{\langle |\bar{I}(\omega)|^2 \rangle} \exp\left(-\frac{|\bar{I}(\omega)|^2}{\langle |\bar{I}(\omega)|^2 \rangle}\right)$$

einer negativen Exponentialfunktion.

- Spektrale Korrelationsfunktion 1. Ordnung**

$$\begin{aligned} \langle \bar{I}(\omega) \bar{I}^*(\omega') \rangle &= e^2 \left\langle \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N \exp(i\omega t_k - i\omega' t_n) \right\rangle \\ &= e^2 \left\langle \sum_{k=1}^N \exp(i(\omega - \omega') t_k) \right\rangle + e^2 \sum_{k \neq n} \langle \exp i\omega t_k \rangle \langle \exp i\omega' t_n \rangle \end{aligned}$$

Korrelationsfunktionen

- Es ist

$$\langle \exp i\omega t_k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(t_k) \exp(i\omega t_k) dt_k = \bar{F}(\omega) = \exp\left(-\frac{\omega^2 \sigma_T^2}{2}\right)$$

die Fouriertransformierte des Gaussprofils $F(t)$

- Damit ist dann

$$\langle \bar{I}(\omega) \bar{I}^*(\omega') \rangle = e^2 N \bar{F}(\omega - \omega') + e^2 N(N-1) \bar{F}(\omega) \bar{F}^*(\omega')$$

- Wenn

$$N |\bar{F}(\omega)|^2 \ll 1,$$

dann ist der zweite Term vernachlässigbar und es ist

$$\langle \bar{I}(\omega) \bar{I}^*(\omega') \rangle = e^2 N \bar{F}(\omega - \omega').$$

Damit trägt nur der Teil bei, der das Schrotrauschen $e^2 N$ beschreibt.

Korrelationsfunktionen

- Die obige Bedingung ist i.A. erfüllt. Es war vorausgesetzt, daß

$$\omega\sigma_T \gg 1$$

$$\omega\sigma_T = 10 \Rightarrow \exp(-100) \cong 10^{-44}$$

N (Zahl der Elektronen im Bunch) ist typisch im Bereich von 10^{11}

$$\Rightarrow N \cdot |\bar{F}(\omega)|^2 \ll 1$$

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Die bis jetzt hergeleitete Theorie des FEL im linearen Bereich wurde für die Bedingung eines unmodulierten Elektronenstrahls und eines Mastersignals E_{ext} durchgeführt, daß mit der Frequenz ω moduliert ist.
- Das Ausgangssignal E_{out} hat dann die gleiche Frequenz ω und wächst im linearen, high Gain Bereich exponentiell mit der Undulatorlänge z $\tilde{E}(\omega, z) \propto \exp(\Lambda z)$
- Man kann dann zeigen, daß ein mit der Frequenz ω modulierter Elektronenstrahl ohne externes Mastersignal E_{ext} im wesentlichen zum gleichen Ergebnis führt
- Wir betrachten jetzt den komplizierten Fall, daß das Eingangssignal durch das Schrotrauschen gegeben ist, daß ein weißes Rauschen besitzt.

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Im linearen Bereich werden alle Frequenzen unabhängig voneinander verstärkt. Deshalb zerlegen wir das Eingangssignal in seine Fourierkomponenten und berechnen für jede Harmonische die Verstärkung.
- Das Laserfeld wird durch

$$\bar{E}(\omega, z) = \tilde{E}(\omega, z) \exp(i\omega(z/c) - t) + C.C.$$

beschrieben.

- Die Verknüpfung zwischen der Zeit und Frequenzdomäne ist durch

$$E(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(\omega, t) \exp(-i\omega t) d\omega$$

gegeben.

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Wir nehmen an, daß die transversale Komponenten des Schrotrauschens am Eingang des Undulators direkt mit dem Schrotrauschen des Strahlsstrom verknüpft ist.

$$\frac{\bar{j}(\omega)}{j_0} = \frac{\bar{I}(\omega)}{I_0}$$

- Wir betrachten nun einen Elektronenbunch mit der Dauer T , so daß gilt

$$\rho\omega_0 T \gg 1.$$

(Resonanzfrequenz ω_0 , Effizienzparameter ρ)

- Diese Bedingung bedeutet, daß der Elektronenbunch viel länger ist, als die *Slippage* der FEL Strahlung relativ zum Elektronenbunch, Durch diese Annahme können Randeffekte vernachlässigt werden.

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Ursache der *Slippage* sind die unterschiedlichen Geschwindigkeiten der FEL Strahlung und des Elektronenbunches in z -Richtung
- Es soll nun aus dem Elektroneneingangsstrom $I(t)$ bzw. $\bar{I}(\omega)$ das elektrische Feld $E(z, t)$ bzw. $\bar{E}(\omega, z)$ berechnet werden. Die Fourierkomponenten sind über eine Green'sche Funktion $\mathcal{G}(\omega, z)$ gekoppelt.

$$\bar{E}(\omega, z) = \mathcal{G}(\omega, z)\bar{I}(\omega)$$

Für $\omega < 0$ ist

$$\bar{E}^*(\omega, z) = \bar{E}(-\omega, z)$$

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Wir betrachten den Fall eines vernachlässigbaren Raumladungsfeld $\hat{\Lambda}_p^2 \rightarrow 0$ und einer scharfen Geschwindigkeitsverteilung des Elektronenstrahls $\hat{\Lambda}_T^2 = 0$. Im linearen Bereich sind die Propagationskonstanten $\hat{\Lambda}$ durch die Lösungen von

$$\hat{\Lambda}(\hat{\Lambda} + i\hat{C})^2 = i \quad (41)$$

gegeben.

- Wir betrachten nur die Lösung, die das exponentielle Wachstum beschreibt. In 0. Ordnung ($\hat{C} = 0$) war die Lösung

$$\hat{\Lambda} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$$

- Durch Entwickeln der Lösungen von (41) um $\hat{C} = 0$ erhält man

$$\text{Re}\hat{\Lambda} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{\hat{C}^2}{9} \right) \quad \text{und} \quad \text{Im}\hat{\Lambda} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4\hat{C}}{3} \right)$$

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Damit ist die Green'sche Funktion dann durch

$$\mathcal{G}(\omega, z) = \frac{2}{3} \exp(i\frac{\omega}{c}z) \exp \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{\hat{C}^2}{9} \right) \hat{z} + \frac{i}{2} \left(1 - \frac{4\hat{C}}{3} \right) \hat{z} \right] \frac{E_0}{I_0}$$

gegeben. Einsetzen liefert sofort das gewünschte Ergebnis.

- Aus der Green'schen Funktion folgt, daß der SASE FEL im linearen Bereich nur ein schmales Frequenzband um die Resonanzfrequenz ω_0 verstärkt.
- Mit

$$\hat{C} = (\omega - \omega_0)/(2\rho\omega_0)$$

berechnet sich die Bandbreite $\Delta\omega$ zu

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \omega - \omega_0 = 2\rho\omega_0\hat{C} \\ &\cong \rho\omega_0\hat{C} \cong \rho\omega_0 \end{aligned}$$

- Das Spektrum eines einzelnen, die Dauer T besitzenden Bunches sollte Spikes mit einer typischen Breite $1/T$ besitzen

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

⇒ Zahl der Spikes (Wellenpakete) sollte dann ungefähr

$$\frac{\Delta\omega}{1/T} \cong \rho\omega_0 T$$

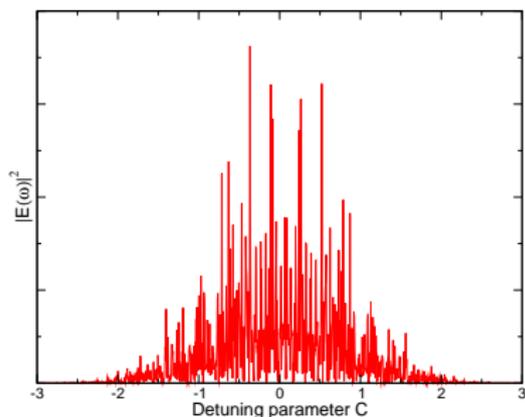
betragen.

- Die typischen Dauer eines Spikes sollte dann $1/(\rho\omega_0)$ sein.
- Wie sieht nun das Spektrum hinter dem Undulator aus ?
- Wie groß ist jetzt die Leistung am Ausgang des FEL ?

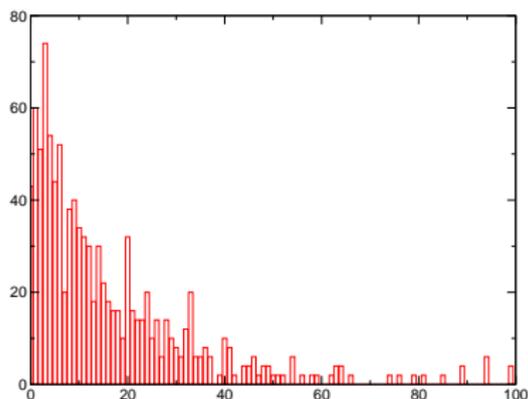
1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Simulation eines Elektronenbunches mit nur 1000 Elektronen

Feld nach dem Undulator mit
 $\hat{z} = 10$



Statistik des Elektronenstrahls
am Eingang des FEL



1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Die Leistung ist durch den Pointing Vektor gegeben

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{cS}{4\pi} \int_0^T E^2(t) dt \\
 &= \frac{cS}{4\pi} \int_0^T \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{E}(\omega, z) \exp(-i\omega t)|^2 d\omega dt \\
 &= \frac{cS}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{E}(\omega, z)|^2 d\omega \cdot \int_0^T |\exp(-i\omega t)|^2 dt \\
 &= \frac{cS}{8\pi} 2 \cdot \int_0^{\infty} |\bar{E}(\omega, z)|^2 d\omega \\
 &= \frac{cS}{4\pi} \int_0^{\infty} |\bar{E}(\omega, z)|^2 d\omega
 \end{aligned}$$

S ist die transversale Ausdehnung des Elektronenstrahl

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Die Leistung, gemittelt über viele Elektronenbunche ist durch

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{cS}{4\pi} \int_0^\infty \langle |\bar{E}(\omega, z)|^2 \rangle d\omega \quad (42)$$

gegeben.

$$\begin{aligned} \langle |\bar{E}(\omega, z)|^2 \rangle &= \langle |\mathcal{G}(\omega, z)\bar{I}(\omega)|^2 \rangle \\ &= \langle |\mathcal{G}(\omega, z)|^2 \rangle \langle |\bar{I}(\omega)|^2 \rangle \end{aligned}$$

- Von der Green'schen funktion $\mathcal{G}(\omega, z)$ liefert nur der Realteil

$$\exp \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{\hat{C}^2}{9} \right) \hat{z} \right]^2 = \exp(\sqrt{3}\hat{z}) \cdot \exp \left[\sqrt{3} \frac{\hat{C}^2}{9} \hat{z} \right]$$

einen Beitrag.

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Da

$$\hat{C} = (\omega - \omega_0)/(2\rho\omega_0)$$

läßt sich $\langle |\bar{E}(\omega, z)|^2 \rangle$ schreiben als

$$\langle |\bar{E}(\omega, z)|^2 \rangle = A \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma_A^2}\right] \langle |\bar{I}(\omega)|^2 \rangle$$

mit

$$A = \frac{4}{9} \left(\frac{E_0}{I_0}\right)^2 \exp(\sqrt{3}\hat{z}) \quad \text{und} \quad \sigma_A = 3\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\rho\omega_0}{\sqrt{\hat{z}}}}$$

- Integration von $\langle |\bar{E}(\omega, z)|^2 \rangle$ liefert dann

$$\langle W_{\text{out}} \rangle = \rho W_b \frac{\sqrt{4\pi\rho}}{3\sqrt{\sqrt{3}\hat{z}}N_\lambda} \exp\sqrt{3}\hat{z}$$

mit der Elektronenstrahlleistung $W_b = \gamma mc^2 I_0 / e$ und der Zahl der Elektronen pro Frequenzintervall $N_\lambda = 2\pi I_0 / (e\omega_0)$

Eigenschaften der SASE-FEL Strahlung

- Es sollen jetzt die Eigenschaften der SASE FEL Strahlung diskutiert werden. Die Statistik der Strahlung $|\bar{E}(\omega, z)|$ ist durch die Statistik des Elektronenstrahls $\bar{I}(\omega)$ gegeben und somit gleich

$$p(|\bar{E}(\omega, z)|^2) = \frac{1}{\langle |\bar{E}(\omega, z)|^2 \rangle} \exp\left(-\frac{|\bar{E}(\omega, z)|^2}{\langle |\bar{E}(\omega, z)|^2 \rangle}\right).$$

- Zur Analyse der Strahlung wird ein Monochromator verwendet
- Der Monochromator hinter dem Undulator wird durch eine Transmissionsfunktion $\mathcal{G}_M(\omega)$ beschrieben. Das Laserfeld ergibt sich dann aus

$$\bar{E}(\omega) = \mathcal{G}_M(\omega)\mathcal{G}(\omega, z)\bar{I}(\omega)$$

- Hinter einem schmalbandigen Monochromator ist die gemessene Intensität proportional zu $|\bar{E}(\omega)|$ und dementsprechend wird die Intensitätsverteilung hinter dem Monochromator der negativen Exponentialfunktion entsprechen.

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Diese Verteilung ist eine Eigenschaft von vollständig chaotischer polarisierter Strahlung
- Es soll zunächst die spektrale Korrelation berechnet werden
- 1. Ordnung

$$g_1(\omega, \omega') = \frac{\langle \bar{E}(\omega) \bar{E}^*(\omega') \rangle}{[\langle |\bar{E}(\omega)|^2 \rangle \langle |\bar{E}(\omega')|^2 \rangle]^{1/2}}$$

Wir hatten gezeigt, daß

$$\langle \bar{I}(\omega) \bar{I}^*(\omega') \rangle = e^2 N \bar{F}(\omega - \omega')$$

ist. Nehmen wir jetzt für den Elektronenbunch $E(z, t)$ einen Rechteckpuls der Zeit T an.

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Die Fouriertransformierte einer Rechteckfunktion ist eine Sinc Function $\sin(\omega)/\omega$. Damit kann man schreiben

$$g_1(\omega, \omega') = \bar{F}(\omega - \omega_0) = \left[\frac{(\omega - \omega')T}{2} \right]^{-1} \sin \left[\frac{(\omega - \omega')T}{2} \right]$$

- Wir definieren die spektrale Kohärenz

$$\Delta\omega_c = \int_{-\infty}^{\infty} |g_1(\omega, \omega')|^2 d(\omega - \omega')$$

- Für einen Rechteckbunch ist dies gleich

$$\Delta\omega_c = \frac{2\pi}{T}$$

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- 2. Ordnung

$$\begin{aligned}
 g_2(\omega, \omega') &= \frac{\langle |\bar{E}(\omega)|^2 |\bar{E}(\omega')|^2 \rangle}{[\langle |\bar{E}(\omega)|^2 \rangle \langle |\bar{E}(\omega')|^2 \rangle]} \\
 &= 1 + |g_1(\omega, \omega')|^2
 \end{aligned}$$

- Die mittlere Energie hinter dem Monochromator ist nun durch

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{cS}{4\pi} \int_0^\infty |\bar{E}(\omega, z)|^2 d\omega = \frac{ce^2 SN}{4\pi} \int_0^\infty |g_M(\omega)|^2 |g(\omega, z)|^2 d\omega$$

gegeben.

- Die mittlere Energie hängt also von dem Verstärkungsprofil des FEL und der Apparatefunktion des Monochromators ab.

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Definition der normierten Dispersion

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\mathcal{E}}^2 &= \frac{\langle (\mathcal{E} - \langle \mathcal{E} \rangle)^2 \rangle}{\langle \mathcal{E} \rangle} \\
 &= \frac{\int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} d\omega' \langle |\bar{E}(\omega)|^2 |\bar{E}(\omega')|^2 \rangle}{\int_0^{\infty} \langle |\bar{E}(\omega)|^2 \rangle d\omega \cdot \int_0^{\infty} \langle |\bar{E}(\omega')|^2 \rangle d\omega'} \\
 &= \frac{\int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} d\omega' \langle |\bar{E}(\omega)|^2 \rangle \langle |\bar{E}(\omega')|^2 \rangle |g_1(\omega, \omega')|^2}{\int_0^{\infty} \langle |\bar{E}(\omega)|^2 \rangle d\omega \cdot \int_0^{\infty} \langle |\bar{E}(\omega')|^2 \rangle d\omega'}
 \end{aligned}$$

- Hier geht zusätzlich noch das Profil des Elektronenbunches ein
- Für die Apparatfunktion des Monochromators nehmen wir jetzt ein Gaussprofil an

$$|G_M|^2 = \exp \left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma_M^2} \right]$$

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Die normierte Dispersion ist dann durch

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{\hat{\sigma}^2} \int_0^{\hat{\sigma}} \text{erf}(x) dx \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma} = \frac{\hat{\sigma}_A \hat{\sigma}_M}{\sqrt{\hat{\sigma}_A^2 + \hat{\sigma}_M^2}}, \quad \hat{\sigma}_x = \sigma_x \cdot T$$

gegeben.

- Asymptotisch ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{E}}^2 &\cong 1 && \text{für} && \sigma_M \cdot T \ll 1 \\ \sigma_{\mathcal{E}}^2 &\cong \frac{\pi}{\sigma_M \cdot T} && \text{für} && 1 \ll \sigma_M \cdot T \ll \sigma_A \cdot T \\ \sigma_{\mathcal{E}}^2 &\cong \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma_A \cdot T} && \text{für} && \sigma_A \cdot T \ll \sigma_M \cdot T \end{aligned}$$

Statistische Optik

- Sehr kurze Grundlagen der statistischen Optik
Sei U eine Zufallsvariable und $p_U(u)$ die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Dann ist die Charakteristische Funktion $M_U(\omega)$ definiert als der Erwartungswert von $\exp(i\omega U)$.

$$M_U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega u) p_U(u) du$$

Die Dichtefunktion $p_U(u)$ berechnet sich damit aus der Fouriertransformation von $M_U(\omega)$

$$p_U(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_U(\omega) \exp(-i\omega u) d\omega$$

- Für thermisches, polarisiertes Licht ist die Dichtefunktion der Intensität durch

$$p_I(I) = \frac{1}{\langle I \rangle} \exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right)$$

gegeben ($I > 0$)

Statistische Optik

- Berechnung wurde ebend für das Schrotrauschen des Elektronenstrahls durchgeführt.
- Die Charakteristische Funktion ist damit durch die Fouriertransformierte

$$M_I(\omega) = \frac{1}{1 - i\omega \langle I \rangle} \quad (43)$$

gegeben.

- Es soll nun die integrierte Intensität betrachtet werden

$$W = \int_{-T/2}^{T/2} I(t) dt \cong \sum_{k=1}^m I_k \Delta t = \frac{T}{m} \sum_{k=1}^m I_k,$$

wobei das Integral hier durch eine Summe genähert wird. Für die Intensität I_k in jedem Intervall k von polarisierter, thermischer Strahlung, die statistisch unabhängig sind gilt nun Gleichung (43).

Statistische Optik

- Damit ist die Charakteristische Funktion $M_W(\omega)$ durch

$$M_W(\omega) \cong \left[1 - i\omega \frac{\langle I \rangle T}{m} \right]^{-m}$$

gegeben.

- Die Wahrscheinlichkeitsdichelfunktion ist dann die Fouriertransformation

$$p_W(W) \cong \left(\frac{m}{\langle I \rangle T} \right)^m \frac{W^{m-1} \exp\left(-m \frac{W}{\langle I \rangle T}\right)}{\Gamma(m)} \quad (44)$$

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Wir möchte jetzt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Strahlung nach dem Monochromator $p(\mathcal{E})$ für einen kompletten Elektronenbunch berechnen.
- Dies entspricht der Integration über die Dauer T des Bunches, so daß wir Gleichung (44) anwenden.

$$p(\mathcal{E}) = \frac{M^M}{\Gamma(M)} \left(\frac{\mathcal{E}}{\langle \mathcal{E} \rangle} \right)^{M-1} \frac{1}{\langle \mathcal{E} \rangle} \exp \left(-M \frac{\mathcal{E}}{\langle \mathcal{E} \rangle} \right)$$

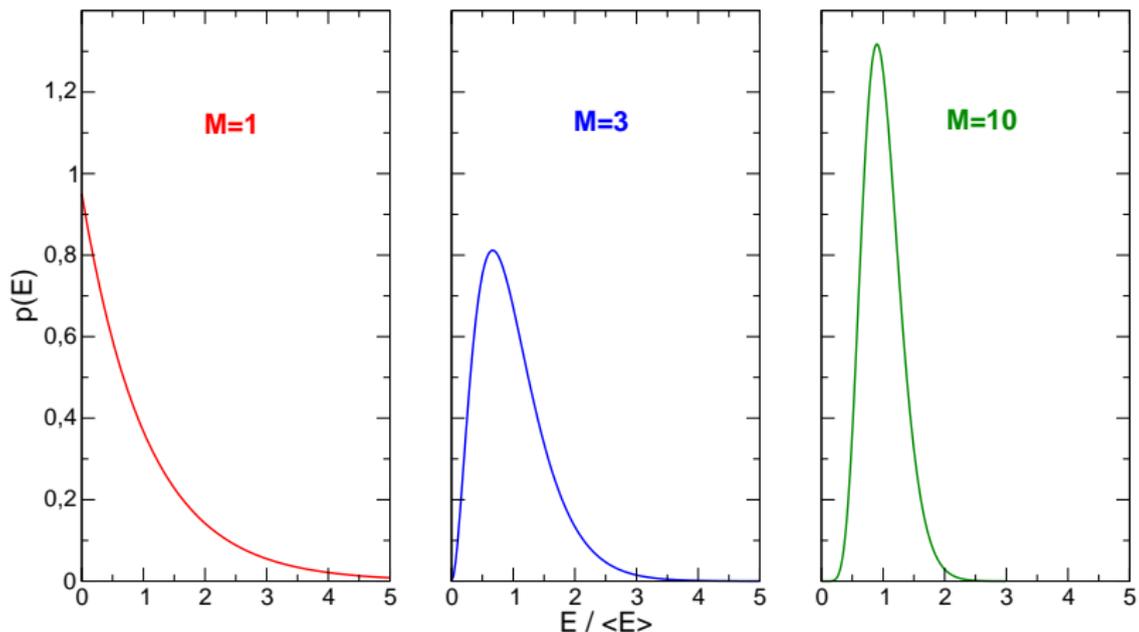
mit

$$M = \frac{1}{\sigma_{\mathcal{E}}^2}$$

- M ist die Zahl der Freiheitsgrade (Moden) in dem Strahlungspuls.

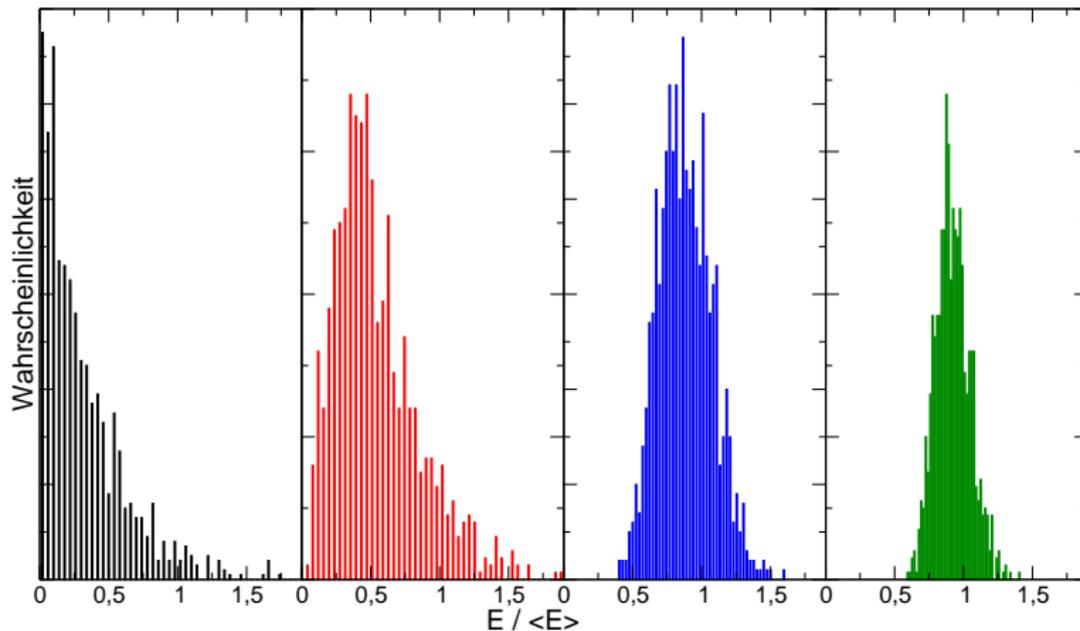
1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Wahrscheinlichkeitsverteilung der Strahlung nach einem Monochromator



1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Ergebnis einer Simulation über 1000 FEL Pulse



1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Was bedeuten nun diese Verteilungen ?
- Schmalbandiger Monochromator ($\sigma_M \cdot T \ll 1 \Leftrightarrow M \cong 1$)
Hinter dem Monochromator wird immer nur ein Spike (Wellenpaket) beobachtet. Ein Spike hat genau die Statistik einer negativen Exponentialfunktion.
Hinter einem schmalbandigen Monochromator wird als Licht beobachtet, dessen Intensität sehr stark schwankt.
- Breitbandiger Monochromator
Das Spektrum nähert sich für sehr viele Moden nach und nach einer Gaussfunktion an
- Wie viele Moden schwingen in dem SASE FEL an ?
- Abschätzung hatte ergeben

$$\rho \omega_0 T$$

- Wie groß sind nun diese Zahlen z.B. bei FLASH ?

1-Dimensionale Theorie des SASE FEL

- Wir nehmen die folgenden Werte an
 - Elektronenbunch: Dauer $T = 100$ fs, Ladung $Q = 1$ nC, Durchmesser $D = 0.1$ mm, Elektronenenergie $E = 1$ GeV
 - FEL Strahlung: $\hbar\omega = 20$ eV
 - Undulatorparameter: $K = 1$

- Daraus ergeben sich die folgenden Werte

$$\Gamma \quad 0.957 \text{ m}^{-1}$$

$$\rho \quad 0.017$$

$$\hat{\Lambda}_p^2 \quad 0.126$$

$$\omega_0 \quad 3 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$$

- Die Zahl der Moden M liegt damit dann im Bereich

$$M \cong 100$$

- Im FEL schwingen also sehr viele Moden an!

SASE FEL – Zeitstruktur

- Die Zeitstruktur des SASE FEL ergibt sich aus der Fouriertransformation des Frequenzfrequenzspektrums
- Spektrum besteht aus vielen, sehr kurzen Spikes
- Die Zeitdauer eines Spikes kann im Bereich von einigen fs liegen, was für die zeitaufgelöste Experimente sehr interessant ist.
- Problem: Zeitauflösung ist durch den gesamten Elektronenbunch gegeben und nicht durch einen einzelnen Spike.

SASE FEL Theorie – Zusammenfassung

- Funktion:

- Schrotrauschen des Elektronenstrahls und Bewegung im Undulator erzeugt spontane Synchrotronstrahlung
- Wechselwirkung der erzeugten Strahlung mit dem Elektronenstrahl erzeugt eine Modulation des Elektronenstrahls (Bunching) und Kohärente Bewegung der Elektronen, die zur Verstärkung der Strahlung führt
- Vollständige Modulation führt zur Sättigung des FEL

