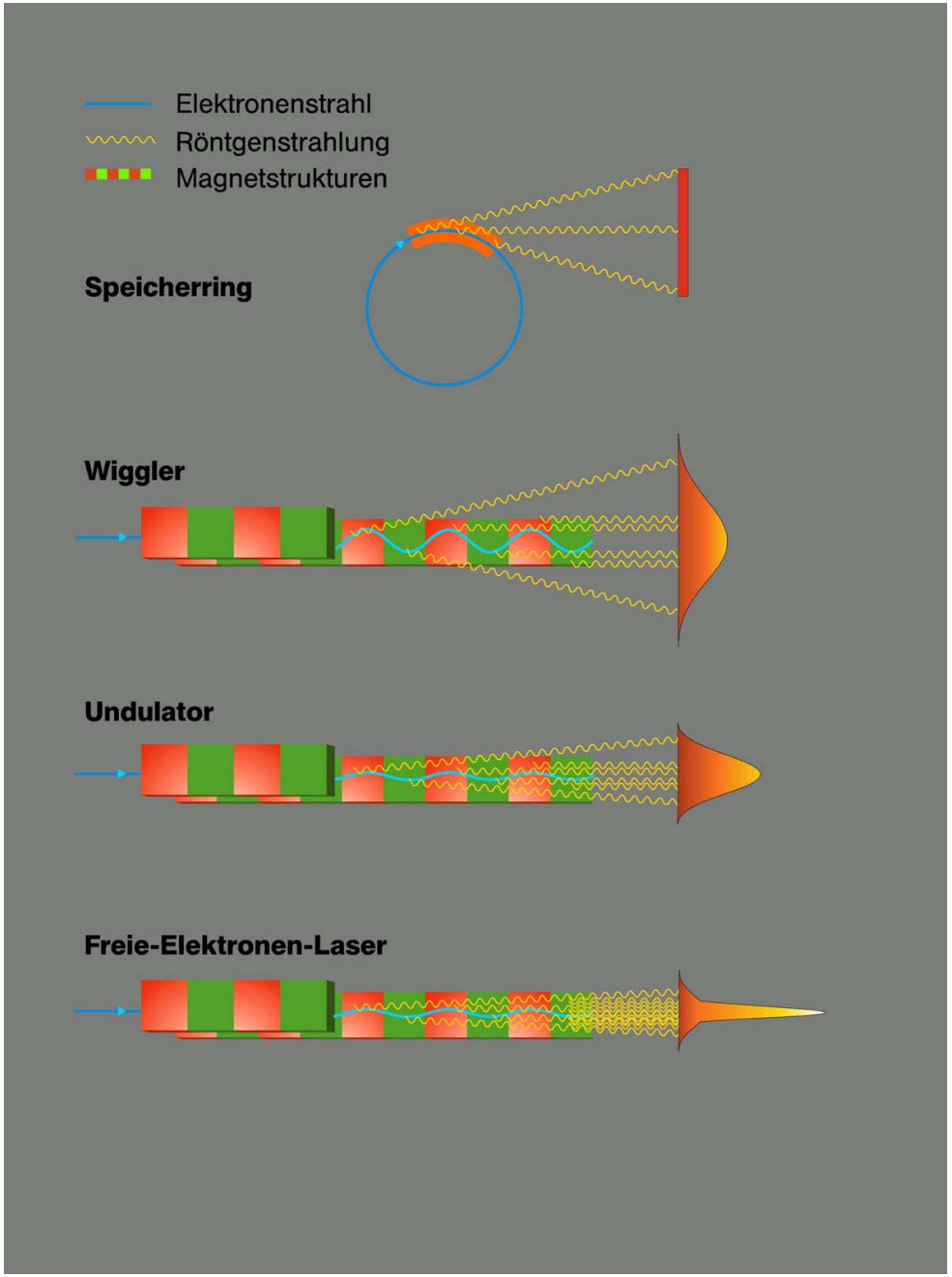
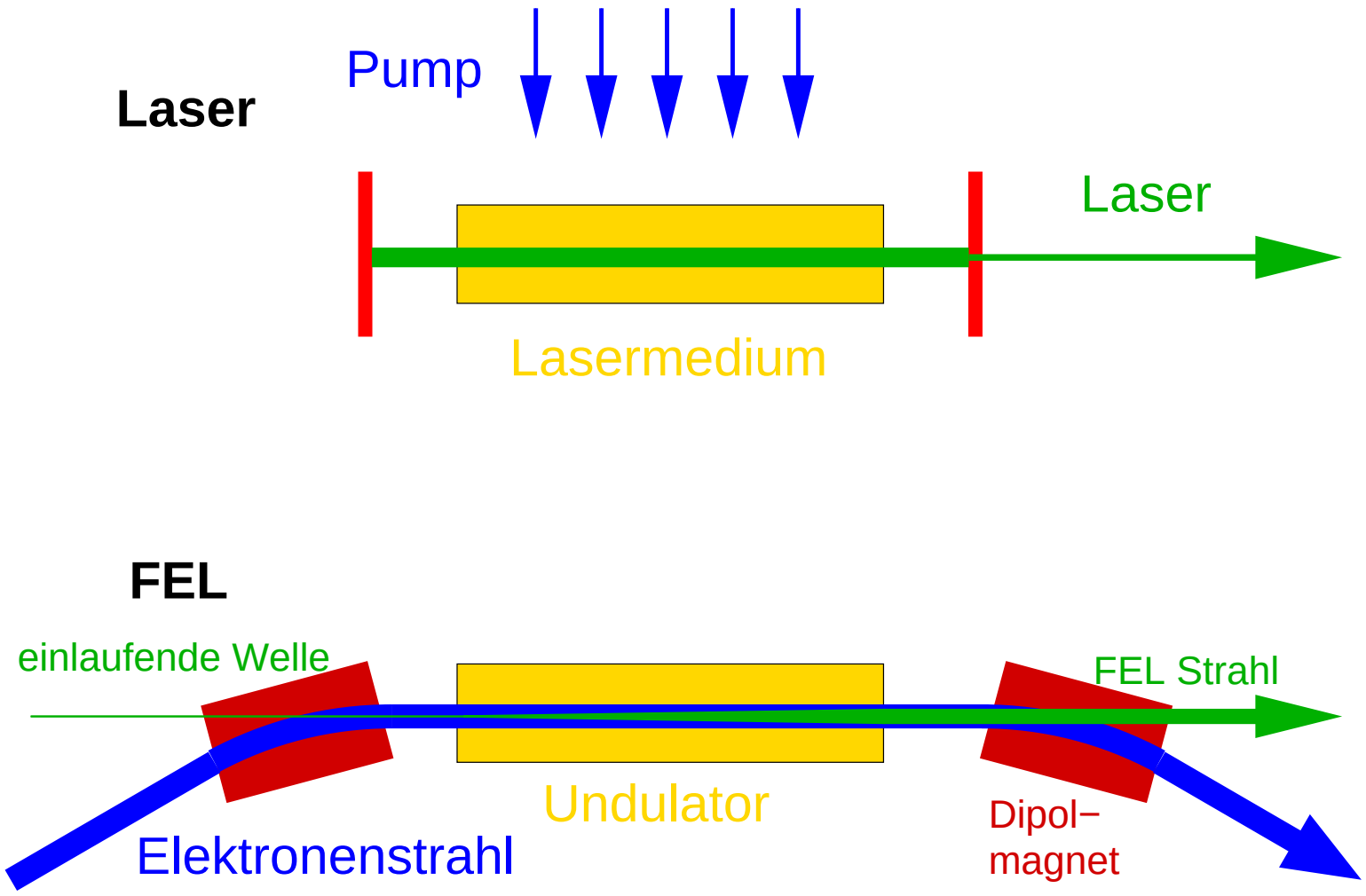


Freie Elektronen Laser

- Energieübertrag
- Verstärkungsbereiche
- Der SASE Prozeß

Laser - FEL


Laser
Pump
Laser
Lasermedium
FEL
einlaufende Welle
FEL Strahl
Undulator
Dipol−
magnet
Elektronenstrahl

FEL Energieübertrag

- Aus dem Elektronenstrahl muß Energie in das Laserfeld $\vec{E}_{FEL}$ entlang des Weges s übertragen werden.

$$\Delta W = -e \int \vec{E}_{FEL} \cdot d\vec{s} = -e \int \vec{v} \cdot \vec{E}_{FEL} dt$$

- Licht ist transversal polarisiert, so dass

$$\vec{v} \perp \vec{E}_{FEL} \Rightarrow \Delta W = 0$$

- In einem Undulator gibt es eine senkrechte Komponente

$$v_x = \beta c \frac{K}{\gamma} \sin(\omega_u t),$$

  die an das FEL Feld ankoppeln kann
- Ein Undulator ist eine Voraussetzung für den Betrieb eines FEL

FEL Energieübertrag

- Wechselwirkung zwischen Elektronen und $\vec{B}$ sowie $\vec{E}_{FEL}$ wird durch die Lorentzkraft beschrieben

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e(\vec{E}_{FEL} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Umschreiben liefert

$$\frac{d(\gamma\vec{\beta})}{dt} = -\frac{e}{mc}(\vec{E}_{FEL} + c\vec{\beta} \times \vec{B})$$

- Gesamtenergie

$$W = \gamma mc^2 \Rightarrow \frac{dW}{dt} = mc^2 \frac{d\gamma}{dt}$$

Mit

$$\Delta W = -e \int \vec{E}_{FEL} \cdot d\vec{s} = -e \int \vec{v} \cdot \vec{E}_{FEL} dt$$

FEL Energieübertrag

- Wechselwirkung zwischen Elektronen und $\vec{B}$ sowie $\vec{E}_{FEL}$ wird durch die Lorentzkraft beschrieben

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e(\vec{E}_{FEL} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Umschreiben liefert

$$\frac{d(\gamma\vec{\beta})}{dt} = -\frac{e}{mc}(\vec{E}_{FEL} + c\vec{\beta} \times \vec{B})$$

- Gesamtenergie

$$W = \gamma mc^2 \Rightarrow \frac{dW}{dt} = mc^2 \frac{d\gamma}{dt}$$

Mit

$$\Delta W = -e \int \vec{E}_{FEL} \cdot d\vec{s} = -e \int \vec{v} \cdot \vec{E}_{FEL} dt$$

FEL Energieübertrag

erhält man

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{e}{mc}\vec{\beta} \cdot \vec{E}_{FEL} \tag{7}$$

$$\frac{d(\gamma\vec{\beta})}{dt} = -\frac{e}{mc}(\vec{E}_{FEL} + c\vec{\beta} \times \vec{B}) \tag{8}$$

- Näherungen
  - Bedingung gilt am Anfang bei schwacher Verstärkung

$$|\vec{E}_{FEL}| \ll c|\vec{\beta} \times \vec{B}|$$

  - β variiert viel stärker als γ

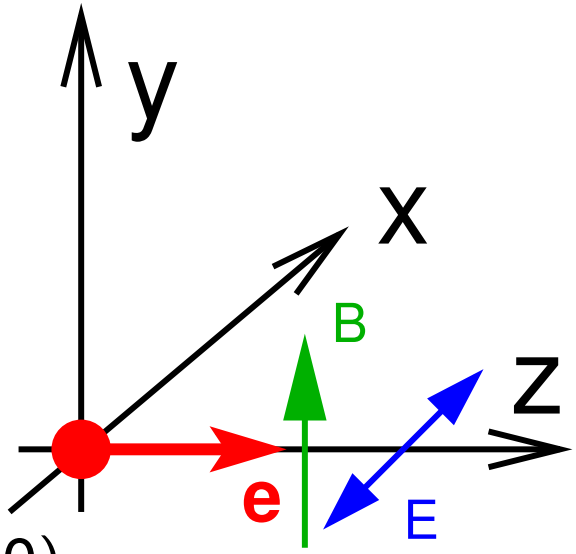
$$\frac{d(\gamma\vec{\beta})}{dt} \approx \gamma\frac{d(\vec{\beta})}{dt}$$

FEL Energieübertrag

Damit wird Gleichung (8) zu

$$\Rightarrow \gamma \frac{d(\vec{\beta})}{dt} = -\frac{e}{mc} c\vec{\beta} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \gamma \frac{d(\vec{\beta})}{dt} = -\frac{e}{mc} c\vec{\beta} \times \vec{B} \qquad (9)$$



- Es sein gegeben

  Undulatorfeld $\vec{B} = (0, B_0 \sin k_u z, 0)$

  Laserfeld $\vec{E}_{FEL} = (E_0 \cos(kz - \omega t), 0, 0)$
- Einsetzen von $\vec{B}$ in Gleichung 9 liefert dann

$$\frac{d\beta_x}{dt} = \frac{eB_0}{mc\gamma} c \sin k_u z$$

FEL Energieübertrag

- Integration ($k_u = 2\pi/\lambda_u$)

$$\beta_x = -\frac{e\lambda_u B_0}{2\pi\gamma mc}\cos k_u z = -\frac{K}{\gamma}\cos k_u z$$

  K ist der früher definierte Undulatorparameter
- Energiegewinn des Laser Feldes war

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{e}{mc}\vec{\beta}\cdot\vec{E}_{FEL}$$

- Geschwindigkeit

$$\beta_x = -\frac{e\lambda_u B_0}{2\pi\gamma mc}\cos k_u z = -\frac{K}{\gamma}\cos k_u z$$

- Einsetzen von β_x

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{eE_0 K}{\gamma mc}\cos(k_u z)\cos(kz - \omega t)$$

FEL Gleichung

mit $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$ folgt

Diskussion der FEL Gleichung

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{eE_0K}{2\gamma mc}(\cos[(k+k_u)z - \omega t] + \cos[(k-k_u)z - \omega t]) \quad (10)$$

Der Energieübertrag hängt von der Feldstärke E_0 des FEL-Feldes ab – Entspricht der induzierten Emission des “normalen” Lasers

- Maximaler Energietransfer: Phase der Oszillation ist konstant

$$\frac{d\Psi_\pm}{dt} = \frac{d}{dt}((k \pm k_u)z - \omega t) = (k \pm k_u)\frac{dz}{dt} - \omega \approx 0$$

FEL Gleichung

Die FEL Gleichung kann in der folgenden Form geschrieben werden

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{K \cdot K_{FEL} \cdot k_u}{2\gamma c} \left(\cos[(k + k_u)z - \omega t] + \cos[(k - k_u)z - \omega t]\right)$$

mit

$$K_{FEL} = \frac{eE\lambda_u}{2\pi mc^2} \qquad \text{analog zum Undulator Parameter} \qquad K = \frac{eB\lambda_u}{2\pi mc}$$

FEL Energieübertrag

- $\frac{dz}{dt}$ ist die mittlere Geschwindigkeit des Elektrons entlang der z-Achse
  Mit $\omega = kc$ und $\dot{z} = \beta^* c$ folgt dann

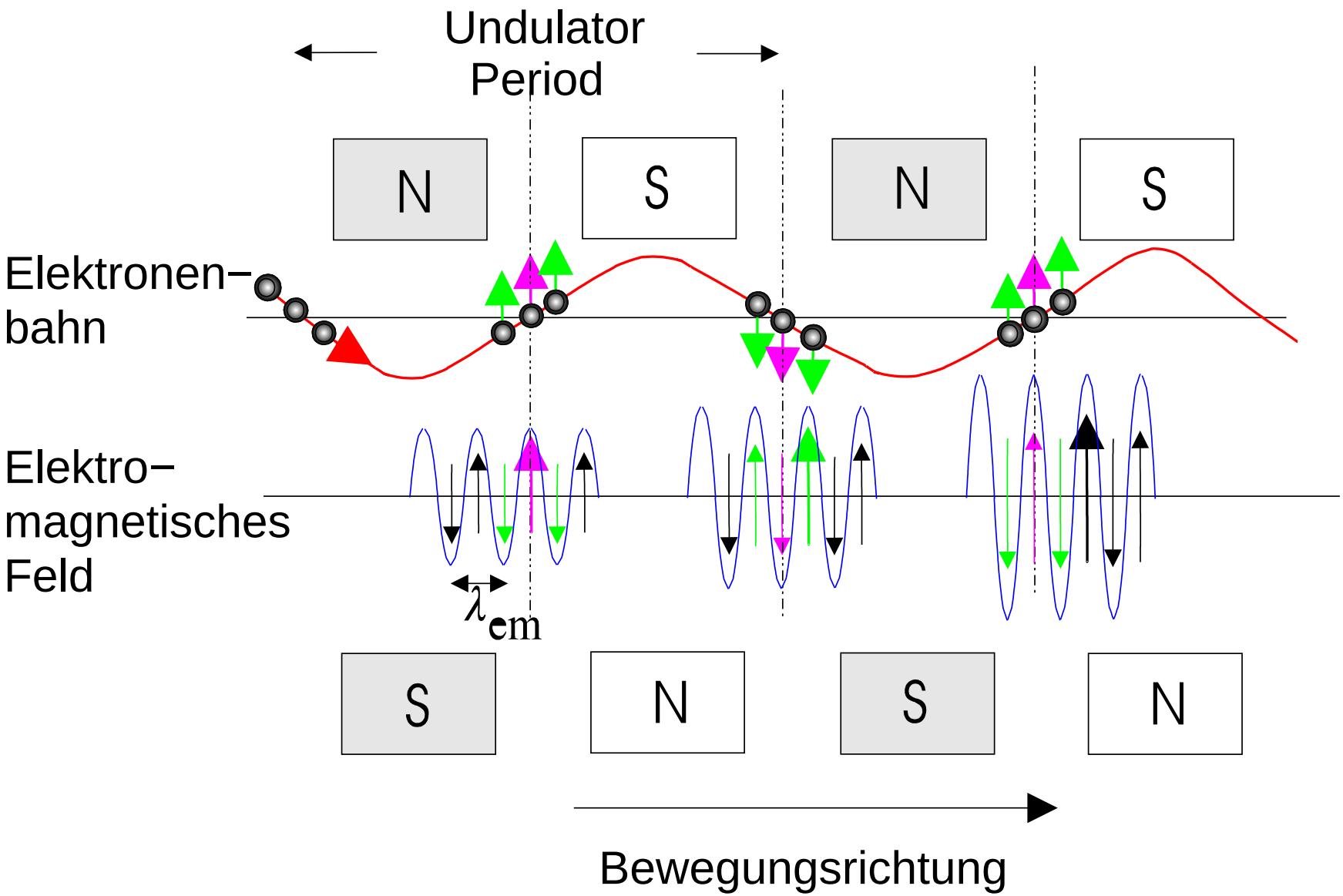
$$\begin{aligned} 0 &= (k \pm k_u)\beta^* - k = (k \pm k_u)\left[1 - \frac{1}{2\gamma^2}\left(1 + \frac{K^2}{2}\right)\right] - k \\ &\overset{k_u \ll k}{\approx} -\frac{k}{2\gamma^2}\left(1 + \frac{K^2}{2}\right) \pm k_u \end{aligned}$$

- Lösung ist nur für $+k_u$ möglich

$$k_u = \frac{k}{2\gamma^2}\left(1 + \frac{K^2}{2}\right)$$

- Das entspricht genau der Bedingung, die wir schon für die von einem Undulator abgestrahlte Wellenlänge λ kennen
- Was bedeutet diese Bedingung ?

FEL Energieübertrag



FEL Mikrobunching

- Für den Energiegewinn hatten wir zwei Gleichungen

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{eE_0K}{2\gamma mc}\left(\cos[(k+k_u)z-\omega t]+\cos[(k-k_u)z-\omega t]\right)$$
$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{e}{mc}\vec{\beta}\cdot\vec{E}_{FEL}$$

- Wechselwirkung von Elektronenstrahl und FEL-Feld kann durch ein effektives axiales elektrisches Feld beschrieben werden

$$E_z^{eff} = \frac{eB_0E_0\lambda_u}{4\pi mc\gamma\beta_z}\cos[(k_u+k)z-\omega t]$$

- Dies entspricht einem ponderomotivem (effektivem) Potential

$$V_{pond} = \frac{eB_0E_0\lambda_u}{4\pi mc\gamma\beta_z(k_u+k)}\sin[(k_u+k)z-\omega t],$$

das sich entlang der Undulator Achse ausbreitet.

FEL Theorie

- Um die Bewegung der Elektronen in diesem Potential zu verstehen muß die Bewegunggleichung der Elektronen gelöst werden
- Beim Undulator wurde nur die Wechselwirkung mit dem Undulatorfeld B_u berücksichtigt

FEL – Wechselwirkung mit drei Feldern

1. Undulatorfeld B_u wie schon bekannt
2. Elektromagnetisches Feld der Laserwelle
3. Feld durch die Ladungsdichteverteilung der Elektronen

FEL Theorie

- Im folgenden wird ein helikaler Undulator vorausgesetzt, da es in diesem nicht zu der komplizierten Kopplung der transversalen und longitudinalen Geschwindigkeiten v_x und v_z kommt
- keine höheren Ordnungen
- Magnetfeld

$$\vec{B}_u = \vec{e}_x B_0 \cos k_u z - \vec{e}_y B_0 \sin k_u z$$

FEL Theorie – Lösungsschritte

1. Berechne und löse die Bewegungsgleichung der Elektronen im FEL
2. Verstärkung bei kleinem Laser Feld
3. Berechne das elektromagnetische FEL Feld in einer 1-dimensionalen Näherung
4. Verstärkung bei mittlerem Laser Feld (linearer Bereich)
5. Sättigung
6. Berücksichtige den statistischen Character der FEL Strahlung (SASE)

FEL Theorie – Elektronen

- Lorentzkraft $\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}_u$
- Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m\gamma \frac{dv_x}{dt} &= ev_z B_y = -ev_z B_0 \sin k_u z \\ m\gamma \frac{dv_y}{dt} &= -ev_z B_x = -ev_z B_0 \cos k_u z \end{aligned}$$

- Wähle komplexe Schreibweise

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= v_x + iv_y, dz = v_z dt \\ \Rightarrow m\gamma \frac{d\tilde{v}}{dz} &= -ie(B_x + iB_y) = -ieB_0 \exp(-ik_u z) \end{aligned}$$

Integration

$$\frac{\tilde{v}}{c} = \frac{K}{\gamma} \exp(-ik_u z) \quad \text{und} \quad \vec{v}_\perp = c\frac{K}{\gamma}(\vec{e}_x \cos k_u z - \vec{e}_y \sin k_u z)$$

FEL Theorie – EM Welle

- Zirkular polarisierte EM Welle parallel zum Elektronenstrahl Energieaustausch war

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = -e\vec{v}_\perp \cdot \vec{E}_\perp \\ \vec{E}_\perp &= E_L \left[\vec{e}_x \cos\left(\omega(\frac{z}{c} - t)\right) - \vec{e}_y \sin\left(\omega(\frac{z}{c} - t)\right) \right] \end{aligned} \tag{11}$$

T : Energie des Elektronenstrahl

- mit $dz = v_z dt$ und Einsetzen in Gleichung (11) folgt ($v_z \cong c$)

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dz} &= \frac{dT}{dt}\frac{dt}{dz} = -\frac{e}{v_z}(v_x E_x + v_y E_y) \\ &\cong -e\frac{K}{\gamma} E_L \left[\cos(k_u z) \cdot \cos\left(\omega(\frac{z}{c} - t)\right) \right. \\ &\quad \left. - \sin(k_u z) \cdot \sin\left(\omega(\frac{z}{c} - t)\right) \right] \end{aligned}$$

FEL Theorie – EM Welle

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dz} &= -e\frac{K}{\gamma}E_L \cos\left[k_u z + \omega\left(\frac{z}{c} - t\right)\right] \\ \Rightarrow \frac{dT}{dz} &= -e\frac{K}{\gamma}E_L \cos\Psi \end{aligned} \tag{12}$$

FEL Theorie – Phase

- Phasenbedingung für die Resonanz war

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\Psi}{dt} = k_u v_z + \frac{\omega}{c} v_z - \omega \\ \Rightarrow d\Psi &= k_u dz + \frac{\omega}{c} dz - \omega dt \\ \Leftrightarrow k_u &+ \frac{\omega}{c} - \frac{\omega}{v_z} = 0 \end{aligned}$$

- Außerhalb der Resonanz ist

$$\frac{d\Psi}{dz} = \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{dt}{dz} = k_u + \frac{\omega}{c} - \frac{\omega}{v_z(T)} \neq 0$$

Die Phase Ψ ändert sich, da v_z sich mit der Energie T ändert

- Entwickeln von $1/v_z(T)$ um die Energie T_0 bis zur 1. Ordnung

$$\frac{d\Psi}{dz} = k_u + \frac{\omega}{c} - \frac{\omega}{v_z(T_0)} + \frac{\omega}{v_z^2(T_0)}\frac{dv_z}{dT}(T - T_0) \qquad (13)$$

FEL Theorie – Phase

- $dv_z/dT = ?$

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dv_z} &= mc^2\frac{d\gamma}{dv_z} = mc^2\frac{d}{dv_z}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\\ \frac{d\gamma}{dv_z} &= -\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\left(-\frac{2v_z}{c^2}\right)\end{aligned}$$

mit $v_z \cong c$ folgt damit

$$\frac{dv_z}{dT} = \frac{c}{T_0\gamma^2}$$

- Einsetzen in Gleichung (13) liefert

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi}{dz} &= k_u + \frac{\omega}{c} - \frac{\omega}{v_z(T_0)} + \frac{\omega}{v_z(T_0)T_0\gamma^2}(T-T_0) \qquad (14)\\ &= C + \frac{\omega}{v_z(T_0)T_0\gamma^2}(T-T_0)\end{aligned}$$

FEL Theorie – Pendelgleichung

- Beachte: Wenn $T_0 = T_R$ (T_R: Resonanzenergie), dann ist $C = 0$
- Differenziere Gleichung (14) nach z und setze Gleichung (12) ein

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Psi}{dz^2} &= \frac{d}{dz}C + \frac{\omega}{v_z(T_0)T_0\gamma^2}\frac{d}{dz}(T - T_0) \\ &= -\frac{\omega}{v_z(T_0)T_0\gamma^2}\cdot\frac{eE_LK}{\gamma}\cos\Psi\end{aligned}$$

Pendelgleichung

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2} + \Omega^2\cos\Psi = 0 \tag{15}$$

- mit

$$\Omega^2 = \frac{\omega eE_LK}{v_z(T_0)T_0\gamma^3}$$

FEL – low gain Bereich

- Problem: Das Laserfeld E_L hängt im FEL selbst von der Elektronenbewegung ab
- Zunächst schwache Felder – “low gain” Bereich
- Energiegewinn des Laserfeld eines Elektrons

$$\Delta W_L = -mc^2 \Delta\gamma = \Delta T$$

- Im Feld gespeicherte Energie

$$W_L = \frac{\epsilon_0}{2} E_L^2 \cdot V$$

V: vom Feld eingenommenes Volumen

- Verstärkung

$$G := \frac{\Delta W_L}{W_L} = -\frac{2}{\epsilon_0 E_L^2 V} \cdot \Delta T \tag{16}$$

FEL – low gain Bereich

- Phasengleichung (14)

$$\psi' = \frac{d\psi}{dz} = k_u + \frac{\omega}{c} - \frac{\omega}{v_z(T_0)} + \frac{\omega}{v_z(T_0)T_0\gamma^2}(T - T_0)$$

- Phasendifferenz zwischen Anfang und Ende des Undulators

$$\begin{aligned}\Delta\psi' &= \psi'_E - \psi'_A \\ &= \frac{\omega}{v_z(T_0)T_0\gamma^2}(T_E - T_A) = \frac{\omega}{v_z(T_0)mc^2\gamma^3}\Delta T \\ &\cong \frac{k}{mc^2\gamma^3}\Delta T = \frac{k}{\gamma^3}\Delta\gamma\end{aligned}$$

- Einsetzen in Gleichung (16) liefert somit

FEL – low gain Bereich

$$G = -\frac{2}{\epsilon_0 E_L^2 V} \cdot \frac{mc^2\gamma^3}{k} \Delta\Psi'$$

Verstärkung ergibt sich aus der Änderung der Phasendifferenz

- Bemerkung

$$\begin{aligned} \lambda_L &= \frac{\lambda_u}{2\gamma^2}(1+\frac{K^2}{2}) \Leftrightarrow k_u = \frac{k}{2\gamma^2}(1+\frac{K^2}{2}) \Rightarrow \frac{\gamma^2}{k} \cong \frac{1}{k_u} \\ G &\cong -\frac{mc^2\gamma}{\epsilon_o E_L^2 V k_u} \Delta\Psi' \end{aligned}$$

FEL – low gain Bereich

- An der Gesamtverstärkung sollen alle Elektronen eines Bunches beteiligt sein

$\Rightarrow$ Mittel über alle Elektronen und Anfangsphasen

$$
\begin{aligned}
< \Delta\Psi' > &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta\Psi'_i \\
\Rightarrow G &= -\frac{2}{\epsilon_0 E_L^2 V}\cdot\frac{mc^2\gamma^3}{k} < \Delta\Psi' > \\
&= -\frac{2mc^2\gamma^3}{\epsilon_0 E_L^2 k} n_B < \Delta\Psi' >
\end{aligned}
$$

- Elektronendichte im Bunch ist $n_B := \frac{n}{V}$

$\Rightarrow$ Die Verstärkung ist also proportional zur Elektronendichte n_B

$\Rightarrow$ Elektronenstrahl muß eine kleine Emittanz haben !

FEL – low gain Bereich

- Berechnung von $\Psi'(z)$ aus der Pendelgleichung (15)

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2} + \Omega^2 \cos\Psi = 0$$

- Multipliziere mit $2\frac{d\Psi}{dz}$

$$2\frac{d\Psi}{dz}\frac{d^2\Psi}{dz^2} + 2\Omega^2 \frac{d\Psi}{dz}\cos\Psi = 0$$

- Integration

$$\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2 + 2\Omega^2 \sin\Psi = C$$

- Phasendifferenz eines Elektrons zwischen Anfang und Ende des Undulators

$$\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)_E^2 - \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)_A^2 = 2\Omega^2(\sin\Psi_A - \sin\Psi_E) \qquad (17)$$

FEL - low gain Bereich

- Wir betrachten den Bereich um die Resonanzfrequenz T_0, so daß

$$\frac{d\Psi}{dz} = \frac{k}{T_0\gamma^2}\Delta T$$

- Einsetzen in (17) liefert

$$\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2 = \frac{k^2}{T_0^2\gamma^4}\Delta T^2 + 2\Omega^2(\sin\Psi_A - \sin\Psi_E)$$

- und somit

$$\frac{d\Psi}{dz} = \frac{k}{T_0\gamma^2}\sqrt{1 + \frac{2\Omega^2 T_0^2\gamma^4}{k^2\Delta T^2}(\sin\Psi_A - \sin\Psi_E)}$$

$$\frac{d\Psi}{dz} = \frac{k}{T_0\gamma^2}\sqrt{1 + \frac{2eE_L K}{\gamma k\Delta T^2}(\sin\Psi_A - \sin\Psi_E)}$$

- Die Gleichung läßt sich i.A. nicht mehr weiter integrieren

FEL – low gain 1. Order

- Schwaches Laser Feld $E_L \rightarrow$ Entwickeln von $\sqrt{\cdot}$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots$$

- $$\frac{d\Psi}{dz} = \frac{k\Delta T}{T_0\gamma^2} \quad \left[1 + \frac{eE_L K\gamma}{k\Delta T^2}(\sin\Psi_A - \sin\Psi(z)) - \frac{1}{8}\left(\frac{eE_L K\gamma}{k\Delta T^2}\right)^2 (\sin\Psi_A - \sin\Psi(z))^2 + \ldots\right.$$

- Berechnung des Mittelwerts $< \frac{d\Psi}{dz} >$ in der 1. Ordnung

FEL – low gain 1. Order

- Phase $\Psi(z)$ im sin wird durch die 0. Ordnung bestimmt

$$\Psi_0' = \frac{k\Delta T}{T_0\gamma^2} \Rightarrow \Psi_0(z) = \frac{k\Delta T}{T_0\gamma^2} \cdot z$$

Phasendifferenz zwischen Anfang und Ende ist somit

$$\Delta\Psi_0 = \frac{k\Delta T}{T_0\gamma^2} \cdot L_u = \frac{k\Delta T}{T_0\gamma^2} \cdot \lambda_u \cdot N$$

$L_u = \lambda_u \cdot N$: Länge des Undulators, N: Periodenzahl

- Einsetzen in die 1. Ordnung

FEL – low gain 1. Order

- Phasenshift in der 1. Ordnung

$$\begin{aligned}\Delta\Psi_1' &= \Psi'(z_0+L_u)-\Psi'(z_0)\\ &= \frac{eE_LK}{\gamma\Delta T}\left[-\underbrace{\sin\Psi(z_0+L_u)}_{=\sin\Psi_a+\Delta\Psi_0}+\underbrace{\sin\Psi(z_0)}_{=\sin\Psi_a}\right]\end{aligned}$$

- Mitteln über alle Anfangsphasen Ψ_A

$$\begin{aligned}<\Psi'>_1 &= \frac{eE_LK}{\gamma\Delta T}\underbrace{\int_0^{2\pi}d\Psi_A\left[\sin\Psi_A-\sin(\Psi_A+\frac{k\Delta T}{T\gamma^2}\lambda_uN)\right]}_{=0}\\ \Rightarrow G_1 &= 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Kein Energieübertrag/Verstärkung in der 1. Ordnung

$\Rightarrow$ FEL Verstärkung ist Prozess höherer Ordnung

- Berechnung der Verstärkung in 2. Ordnung

FEL – low gain 2. Order

- Berechnung der Phasendifferenz nun aus der 1. Ordnung

$$\Delta\Psi_1'(z) = \Psi'(z) - \Psi'(z_0) = \frac{eE_L K}{T_0\gamma^3\Delta T}\left[\sin\Psi_A - \sin()\,\frac{k\Delta T}{T\gamma^2}z + \Psi_A\right]$$

- Integration über die Undulatorlänge $L_u = N_u \cdot \lambda_u$

$$\Delta\Psi_1 = \frac{eE_L K}{T_0\gamma^3\Delta T}\left[N_u \cdot \lambda_u \sin\Psi_A - \int_0^{L_u} dz \sin\left(\frac{k\Delta T}{T\gamma^2}z + \Psi_A\right)\right]$$

Mathematica:

$$\int_0^L dz \sin(a/Lz + \Psi) - L\sin\Psi = \frac{L}{a}(\cos\Psi - \cos(a+\Psi) - a\sin\Psi)$$

FEL – low gain 2. Order

- Definiere

$$\begin{aligned} \frac{2w}{L_u} &:= \frac{k_L}{\gamma^2} \cdot \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta \Psi_0}{L_u} \\ L_u &:= N_u \lambda_u \text{ Länge des Undulators} \end{aligned}$$

- Phasenshift in 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \Delta \Psi_1 &= \frac{eE_0 K}{T_0 \gamma^3 \Delta T} \frac{\gamma^2 T_0}{k_L \Delta T} [\cos \Psi_a - \cos(2w + \Psi_a) - 2w \sin \Psi_a] \\ &= \frac{eE_0 K}{\gamma \Delta T^2 k_L} [\cos \Psi_a - \cos(2w + \Psi_a) - 2w \sin \Psi_a] \qquad (18) \end{aligned}$$

FEL – low gain 2. Order

- Berechnung der Veränderung der Phasendifferenz in 2. Ordnung

$$\Delta\Psi_2' = \Delta\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)_2 \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{k_L \Delta T}{T_0 \gamma^2}\frac{1}{8}\left(\frac{2eE_0K}{\gamma k_L \Delta T^2}\right)^2 \\ &\times\left(8\frac{\gamma k_L \Delta T^2}{2eE_0K}\left[\sin\Psi_a - \sin(\Delta\Psi_1 + \Delta\Psi_0 + \Psi_a)\right]\right. \\ &\left. - \left[\sin\Psi_a - \sin(\Delta\Psi_0 + \Psi_a)\right]^2\right) \end{aligned} \tag{20}$$

FEL – low gain 2. order

- Im Low gain Bereich ist die Phasenänderung klein, so daß

$$\begin{aligned}\Delta\Psi_1 &\ll 1\\ &\Rightarrow \sin\Psi_a - \sin(\Delta\Psi_1 + \Delta\Psi_0 + \Psi_a)\\ &\overset{\text{Taylor}}{\approx} \sin\Psi_a - \sin(\Delta\Psi_0 + \Psi_a) - \Delta\Psi 1 \cdot \cos(\Delta\Psi_0 + \Psi_a)\end{aligned}$$

- Einsetzen in Gleichung (20) liefert zusammen mit dem Wert für $\Delta\Psi_1$ aus Gleichung (18) somit

$$\begin{aligned}\Delta\Psi_2' = &\frac{k_L\Delta T}{T_0\gamma^2}\frac{1}{8}\left(\frac{2eE_0K}{\gamma k_L\Delta T^2}\right)^2\\ &\times\left\{8\frac{\gamma k_L\Delta T^2}{2eE_0K}\left[\sin(\Delta\Psi_0+\Psi_a)-\sin(\Psi_a)\right]\right.\\ &+2\cos(\Delta\Psi_0+\Psi_a)\left[\cos\Psi_a-\cos(2w+\Psi_a)-2w\sin\Psi_a\right]\\ &\left.-\left[\sin\Psi_a-\sin(\Delta\Psi_0+\Psi_a)\right]^2\right\}\end{aligned}$$

FEL – low gain 2. order

- Jetzt muß wieder über alle Anfangsphasen Ψ_a gemittelt werden um alle Elektronen in einem Bunch zu berücksichtigen. Dabei erhält man dann

$$\begin{aligned}
\langle \sin(\Delta\Psi_0 + \Psi_a) - \sin(\Psi_a) \rangle &= 0 \\
\langle \cos^2(\Delta\Psi_0 + \Psi_a) \rangle &= \frac{1}{2} \\
\langle \cos(\Delta\Psi_0 + \Psi_a) \cos\Psi_a \rangle &= \frac{1}{2} \cos\Delta\Psi_0 \\
\langle \cos(\Delta\Psi_0 + \Psi_a) \sin\Psi_a \rangle &= -\frac{1}{2} \sin\Delta\Psi_0
\end{aligned}$$

- Für die Änderung der Phasendifferenz in 2. Ordnung kann man dann schreiben

$$< \Delta\Psi_2' >= \frac{e^2 E_L^2 K^2}{2\gamma^4 k_L T_0 \Delta T^3} \left(1 - \cos\Delta\Psi_0 - \frac{\Delta\Psi_0}{2} \cdot \sin\Delta\Psi_0 \right)$$

FEL – low gain 2. Order

- Es war (Phasenshift in der 0. Ordnung)

$$\frac{k_L \Delta T}{\gamma^2 T_0} = \frac{\Delta\Psi_0}{L_u}$$

  $\Delta\Psi_0$ ist also proportional zur Abweichung der kinetischen ΔT von der Resonanzenergie T_0
- Ersetzt man ΔT noch durch $\Delta\Psi_0$ so ergibt sich für den Verlauf der Verstärkung G

$$G \propto < \Delta\Psi_2' > \propto \frac{1}{\Delta\Psi_0^3}\left(1 - \cos\Delta\Psi_0 - \frac{\Delta\Psi_0}{2}\cdot\sin\Delta\Psi_0\right)$$

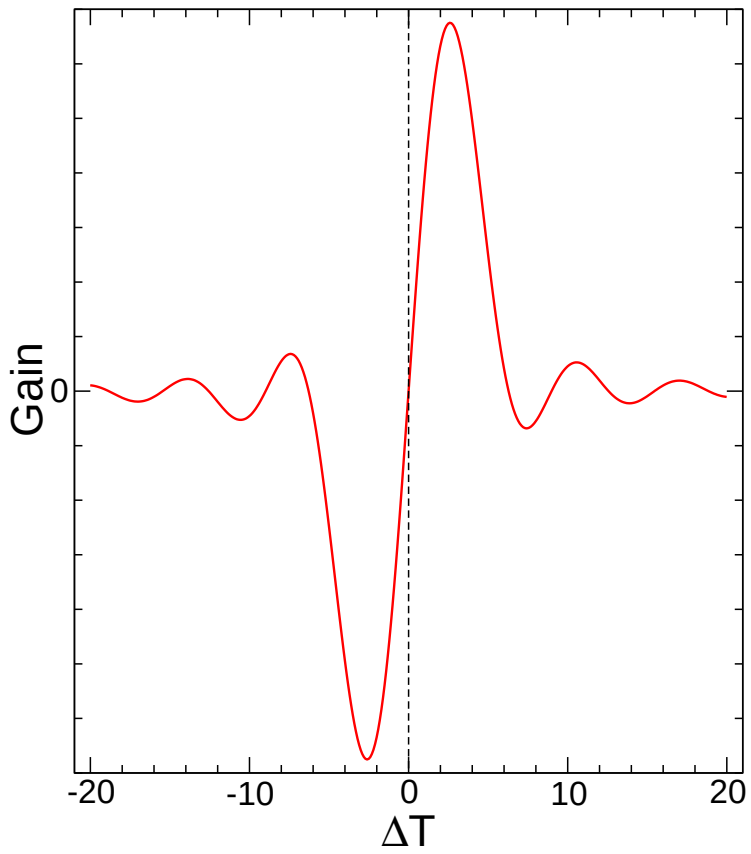
- Man kann leicht nachrechnen, dass gilt

$$\frac{d}{dw}\left(\frac{\sin w}{w}\right)^2 = -\frac{1}{w^3}\left(1 - \cos 2\cdot w - w\cdot\sin 2\cdot w\right)$$

FEL – low gain 2. Order

- Die Verstärkung kann dann in der Form

$$G \propto < \Delta\Psi_2' > \propto \frac{d}{dw}\left(\frac{\sin w}{w}\right)^2 \quad \text{mit } 2 \cdot w = \Delta\Psi_0$$



- Genau bei der Resonanzfrequenz $T = T_0$, $\Delta T = 0$ erfolgt keine Verstärkung
- Elektronen müssen mit etwas höherer Energie in den FEL eintreten
- bei kleineren Energien wird den Elektronen aus dem Laserfeld Energie zugeführt

$\Rightarrow$ Teilchenbeschleuniger

Take Home Message – FEL Low Gain

- Die transversale Geschwindigkeitskomponente im Undulator bewirkt den Energieübertrag vom EM Feld auf den Elektronenstrahl.
- Elektronen bewegen sich in einem ponderomotoven Potential aus Undulator Feld und Feld der Laserwelle.
- Wechselwirkung des Elektronenbunch mit Laserwelle erzeugt Mikrobunching der Elektronenbunches.
- Kohärente Bewegung der Elektronen in einem Mikrobunch.
- Bewegung der Elektronen im onderomotiven Potential kann durch eine Pendelgleichung beschrieben werden.
- FEL Verstärkung ist ein nichtlinearer Prozeß höherer Ordnung.

FEL Theorie – Linearer Bereich

- Im folgenden soll nun der Bereich hoher Verstärkung (high Gain) und später der Bereich der Sättigung betrachtet werden.
- Beschreibung im Rahmen des Hamilton Formalismus
- Felder in complexer Schreibweise

$$\text{Undulator:} \qquad B_x + iB_y = B_u e^{-ik_u z}$$

$$\text{Laser:} \qquad E_x + iE_y = \tilde{E}_L(z) \exp\left(i\omega(\frac{z}{c} - t)\right)$$

Hamilton Funktion

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(p_z, z, t) &= \left[(p_z c + eA_z)^2 + e^2(\vec{A}_\perp + \vec{A}_u)^2 + m^2c^4\right]^{1/2} - e\Phi \\ \vec{A}_u &= -\vec{e}_z \times \int \vec{H}_u dz \text{ Vectorpotential des Undulator} \end{aligned}$$

- Verallgemeinerter Hamilton Formalismus
  t ist kanonisch conjugiert zu $p_0 = -\mathcal{H}$

$\longrightarrow$ kanonische Koordinaten $(p_0, p_z), (t, z)$

Hamilton Formalismus

- Transformation in ein angepasstes Koordinatensystem

$(P_0, P), (z, \psi)$ mit

$$\begin{aligned} P &= -p_0/\omega = \frac{\mathcal{H}}{\omega} = \frac{T}{\omega} \\ P_0 &= p_z + \frac{p_0}{\omega}\left(k_u + \frac{\omega}{c}\right) \\ \psi &= k_u z + \omega(\frac{z}{c} - t) \end{aligned}$$

- Damit hat die Hamilton Funktion die folgende Form

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}(P, \psi, z) &= -P_0 \\ \tilde{\mathcal{H}}(P, \psi, z) &= (k_u + \frac{\omega}{c})P - p_z(P, z, \psi) \end{aligned}$$

$$= (k_u + \frac{\omega}{c})P + \quad eA_z/c \quad - \frac{1}{c}\left[(P\omega + e\phi)^2 - e^2(\vec{A}_\perp + \vec{A}_u)^2 - m^2c^4\right]^{1/2}$$

Eichtransformation

- mit den kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P} \text{ und } \frac{dP}{dz} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \psi}$$

- Vier Felder:
  1. $\vec{A}_u$: Undulatorfeld
  2. $\vec{A}_\perp$: Feld der Laserwelle
  3. ϕ : Ladungsfeld der Elektronen
- Wahl einer Eichung χ für das Vectorpotential $\vec{A}$

$$\phi \to \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t}, \qquad A_z \to A'_z = A_z + \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t}$$

- Longitudinale Feldkomponente E_z bleibt damit unverändert

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial t}$$

Hamiltonfunktion

- Durch diese Wahl von χ verschwindet das Skalarpotential

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} c \int dt \phi(z,t) = \phi - \phi = 0$$

- Das Raumladungsfeld wird somit durch A_z beschrieben

$$E_z(z,t) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial A'_z}{\partial t} \leftrightarrow E_z(\psi, z) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial A'_z(z,\psi)}{\partial \psi}$$

- Die Hamiltonfunktion $\tilde{\mathcal{H}}$ lautet somit

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} = (k_u + \frac{\omega}{c})\frac{T}{\omega} \quad &- \quad \frac{1}{c}\left\{T^2 - e^2(\vec{A}_\perp + \vec{A}_u)^2 - m^2c^4\right\}^{1/2} \\ &+ \quad \frac{e}{\omega}\int d\psi E_z(z,\psi) \end{aligned}$$

- Im betrachteten linearen Bereich ist das Feld des Undulators $\vec{A}_u$ viel größer als das Feld der Laserwelle $\vec{A}_\perp$

$$|\vec{A}_\perp| \ll |\vec{A}_u|$$

Hamiltonfunktion

- Damit kann die Wurzel um $\vec{A}_\perp$ entwickelt werden

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{T^2 - e^2(\vec{A}_\perp + \vec{A}_u)^2 - m^2c^4} \\
\cong\ & \sqrt{T^2 - e^2A_u^2 - m^2c^4} \\
-\ & \frac{e^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{T^2 - e^2A_u^2 - m^2c^4}}(2\vec{A}_\perp + 2\vec{A}_u) \cdot \vec{A}_\perp + \dots \\
=\ & \sqrt{T^2 - e^2A_u^2 - m^2c^4} - \frac{e^2}{\sqrt{T^2 - e^2A_u^2 - m^2c^4}}\vec{A}_u \cdot \vec{A}_\perp
\end{aligned}
$$

In der Entwicklung wurden alle Terme mit $A_\perp^2$ vernachlässigt

Hamiltonfunktion

- Einsetzen in die Hamiltonfunktion liefert somit

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}} &= \frac{T}{\omega}(k_u + \frac{\omega}{c}) - \frac{1}{c} v \left\{ T^2 - e^2 A_u^2 - m^2 c^4 \right\}^{1/2} \\ &+ \frac{e^2}{c} \left\{ T^2 - e^2 A_u^2 - m^2 c^4 \right\}^{-1/2} (\vec{A}_u \cdot \vec{A}_\perp) + \frac{e}{\omega} \int d\psi E_z(z, \psi)\end{aligned}$$

- Wir wissen schon, daß der FEL Prozess ein Prozeß 2. Ordnung ist. Deshalb entwicklen wir die Hamiltonfunktion noch bis zur zweiten Ordnung in $T - T_0$, da die Energie des Elektronenstrahls nicht stark von der Resonanzenergie T_0 abweichen darf, um eine Verstärkung zu erzielen.

Hamiltonfunktion

- Entwickelte Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}} &= H(P,\psi,z) \\ &= C\cdot P + \frac{\omega}{2c\gamma_z^2 T_0}P^2 - (Ue^{i\psi} + U^* e^{-i\psi})(1-\frac{P}{T_0}) + \int d\psi e E_z\end{aligned} \tag{21}$$

mit

$$\begin{aligned}P &= T - T_0 \\ C &= k_u - \frac{\omega}{2c\gamma_z^2} \\ U &= -\frac{ek_L\tilde{E}(z)}{2i\gamma} \\ \gamma_z^{-2} &= \gamma^{-2} + \frac{K^2}{\gamma^2} = \frac{1}{\gamma^2}(1+K^2)\end{aligned}$$

U ist das ponderomotive Potential

Bewegung eines Ensembles

- Annahme:
  Die Wechselwirkung eines Elektron mit dem kollektivem Feld, das von allen anderen Elektronen erzeugt wird (Strahlung und Raumladung), sei viel größer als die Wechselwirkung mit dem nächsten Nachbarn
- Entspricht einer *Mean field approximation*, wie sie z.B. aus der Atom- und Molekülphysik bekannt ist und zur Beschreibung von Mehrelektronensystemen angewandt wird.
- Sei $f(P, \psi, z)$ die Elektronenstrahlverteilungsfunktion
  Dann gilt für diese die Liouville'sche Gleichung

$$[H, f] + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dt} = 0$$

- Kommutator ist definiert als

$$[u, v]_{p,q} := \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial q_k} \right)$$

Liouville'sche Gleichung

- Lösung über die Störungstheorie
- Sei

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \tilde{f}_1 e^{i\psi} + \tilde{f}_1^* e^{-i\psi} = f_0 + \tilde{f}_1 e^{i\psi} + C.C. \\ E_z &= \tilde{E}_z e^{i\psi} + C.C. \end{aligned}$$

mit

$f_0(P)$:	Ungestörte Funktion
$\tilde{f}_1(P,z)$:	kleine Störung $\lvert\tilde{f}_1\rvert \ll \lvert f_0\rvert$

Liouville'sche Gleichung

- Im P, ψ, z System lautet die Liouville'sche Gleichung somit

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial P}\frac{\partial f}{\partial \psi} - \frac{\partial H}{\partial \psi}\frac{\partial f}{\partial P} = 0 \tag{22}$$

- Bedeutung:
  f ändert sich nicht entlang der Trajektorien außer durch die Wechselwirkung mit dem kollektivem Feld
- Lösung von (22) zusammen mit den Maxwell Gleichungen liefert die Lösung für das kollektive Feld und die Verteilungsfunktion f.

Störungstheorie

- Wir setzen jetzt Gleichung (21) (Hamiltonfunktion $H(P, \psi, z)$) in Gleichung (22) (Liouville'sche Gleichung) unter Verwendung der ebend definierten Funktion f ein. Das liefert nach einigen Umformungen

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial z} + i\left(C + \omega \frac{P}{c\gamma_z^2 T_0}\right)\tilde{f}_1 + (iU - e\tilde{E}_z)\frac{\partial f_0}{\partial P} = 0 \qquad (23)$$

Hierbei sind Terme mit

$$U\frac{\tilde{f}_1}{T_0} \quad \text{und} \quad (iU - e\tilde{E}_z)\frac{d\tilde{f}_1}{dP}$$

relativ zu

$$(iU - e\tilde{E}_z)\frac{df_0}{dP}$$

zu vernachlässigen.

Anfangsbedingungen

- Zur Lösung der Gleichungen werden Anfangsbedingungen für den Elektronenstrahl benötigt. Diese werden so gewählt, daß der Strahl beim Eintritt in den Undulator ($z = 0$) weder in der Dichte noch in der Geschwindigkeit moduliert ist.

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1|_{z=0} &= 0 \\ f_0 &= n_0 \cdot F(P) \\ \int F(P) \cdot dP &= 1 \end{aligned}$$

n_0 : Strahldichte
$F(P)$: normierte Dichteverteilungsfunktion

$\Rightarrow$ Lösung von Gleichung (23) mit diesen Anfangsbedingungen lautet dann

$$\tilde{f}_1 = -n_0 \frac{dF}{dP} \int_0^z dz' (iU - e\tilde{E}_z) \exp\left\{ i \left[C + \frac{\omega P}{c\gamma_z^2 T_0} \right] (z' - z) \right\} \quad (24)$$

Stromdichte

- Die Gleichung enthält wiederum das axiale Feld $\tilde{E}_z$, dass jetzt bestimmt werden soll.
- Die Stromdichte des Elektronenstrahls ist durch

$$\begin{aligned} j_z &= -ev_z \int f dP \\ &= j_0 + \tilde{j}_1 e^{i\psi} + C.C. \end{aligned}$$

  gegeben
- In der ultra-relativistischen Näherung $v_z \cong c$ gilt dann

$$\begin{aligned} \tilde{j}_1 &\cong -ec \int \tilde{f}_1 dP \\ j_0 &= -ecn_0 \end{aligned}$$

Stromdichte

- Wir betrachten nun die Maxwellsche Gleichung

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{25}$$

Das Feld $\vec{E}$ und die Phasen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} E_z &= \tilde{E}_z e^{i\psi} + C.C. \quad \text{und} \quad \psi = k_u z + \omega(\frac{z}{c} - t) \\ \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \tilde{E}_z \frac{\partial}{\partial t} e^{i\psi} = -i\omega \tilde{E}_z e^{i\psi} \end{aligned}$$

- Am Ort des Elektronenstrahls ist $\mathrm{rot}\vec{H} = 0$, so wird in der 1. dimensionalen Näherung Gleichung (25) zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial t} &= -i\omega \tilde{E}_z e^{i\psi} + C.C. = -4\pi \tilde{j}_1 e^{i\psi} + C.C. \\ \Rightarrow \tilde{E}_z &= -\frac{i4\pi \tilde{j}_1(z)}{\omega} \end{aligned} \tag{26}$$

Stromdichte

- Gleichung (26) können wir nun in Gleichung (24), welche die Modulation des Elektronenstrahl beschreibt, einsetzen. Da

$$\tilde{j}_1 \cong -ec \int \tilde{f}_1 \, dP$$

war wird zudem noch über P integriert. Damit folgt dann

$$\begin{aligned} \tilde{j}_1 &= i \cdot j_0 \int_0^z dz' \left\{ U + \frac{4\pi e \tilde{j}_1(z')}{\omega} \right\} \\ &\times \int dP \frac{dF(P)}{dP} \exp\left\{ i \left[C + \frac{\omega P}{c\gamma_z^2 T_0} \right] (z' - z) \right\} \end{aligned} \tag{27}$$

Dies ist eine Integro-Differentialgleichung, die den Elektronenstrom in dem 1. dimensionalen Modell beschreibt.

Vektorpotential

- Eine weitere Bedingung kann aus der Wellengleichung hergeleitet werden.
- Maxwell

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Die Eichung wurde so gewählt, dass $\phi = 0$ ist.

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}$$

- Damit ist die Wellengleichung gleich

$$\triangle\vec{A} - \mathrm{grad\ div}\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Wellengleichung

- Das Vektorpotential ist durch die obige Eichung noch nicht genau bestimmt und wir können noch wählen $\mathrm{div}\vec{A} = 0$

$$\Rightarrow -\triangle\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

- mit $\vec{j} = 0$ ist dies die bekannte Wellengleichung
- Im FEL ist jedoch $\vec{j} \neq 0$, da der Elektronenstrahl vorhanden ist
- Es soll das elektromagnetische Feld des FEL betrachtet werden $\Rightarrow$ nur $\vec{A}_\perp$ ist relevant

$$\frac{\partial^2\vec{A}_\perp}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}_\perp}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_\perp \tag{28}$$

Wellengleichung

- Die transversale Stromdichte $\vec{j}_\perp$ folgt aus der Geschwindigkeit $\vec{v}_\perp$. Für diese gilt

$$\begin{aligned} \frac{v}{c} &= \frac{K}{\gamma} e^{-ik_u z} \\ \Rightarrow j_x + ij_y &= \frac{K}{\gamma} e^{-ik_u z} \left[\tilde{j}_1 e^{i\psi} + C.C. \right] \end{aligned}$$

- Lösungsansatz

$$A_{x,y} = \tilde{A}_{x,y} \exp\left(i\omega(\frac{z}{c} - t) \right) + C.C.$$

Wellengleichung

- Berechnung der Terme

$$\frac{\partial^2 \vec{A}_x}{\partial z^2} = \exp\left(i\omega(\frac{z}{c} - t)\right)\left\{\frac{2i\omega}{c}\frac{\partial \tilde{A}_x(z)}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{A}_x(z)}{\partial z^2} - \tilde{A}_x(z)\frac{\omega^2}{c^2}\right\}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}_x}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{A}_x(z)\exp\left(i\omega(\frac{z}{c} - t)\right) + C.C.$$

- Mit $\exp(-ik_u z) = \cos k_u z - i \sin k_u z$ folgt

$$\vec{j}_\perp = \frac{K}{\gamma}\begin{pmatrix} \cos k_u z \\ -\sin k_u z \end{pmatrix}(\tilde{j}_1 e^{i\psi} + C.C.)$$

- Einsetzen von $\vec{A}_{x,y}$ und $\vec{j}_\perp$ in die Wellengleichung liefert dann

Wellengleichung

$$e^{\left(i\omega\left(\frac{z}{c}-t\right)\right)}\left\{\frac{2i\omega}{c}\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix}\tilde{A}_x\\ \tilde{A}_y\end{pmatrix}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\begin{pmatrix}\tilde{A}_x\\ \tilde{A}_y\end{pmatrix}+C.C.\right\}$$
$$=-\frac{4\pi K}{c\gamma}\begin{pmatrix}\cos k_u z\\ -\sin k_u z\end{pmatrix}(\tilde{j}_1 e^{i\psi}+C.C.)$$

- Diese Gleichung muß jetzt wieder vereinfacht werden. Dazu macht man die folgenden Annahmen
  1. $\tilde{j}_1(z)$ ist eine langsame veränderliche Funktion auf der Skala der Undulatorperiode
  2. Die Länge z ist viel größer als die Undulatorperiode λ_u

  Das bedeutet, dass man eine langen Undulator mit vielen Perioden betrachten muß und das sich von einer Periode zur nächsten der Elektronenstrahl nur wenig ändert.

Laser Feld

- Das bewirkt
  1. Die schnelle Oszillation $\cos k_u z$ und $\sin k_u z$ kann vernachlässigt werden
  2. die 2. Ableitung von $\tilde{A}_{x,y}$ wird vernachlässigt
- Damit wird die Gleichung zunächst zu

$$\exp\left(i\omega(\frac{z}{c}-t)\right)\left\{\frac{2i\omega}{c}\frac{\partial}{\partial z}\tilde{A}_{x,y}+C.C.\right\}=-\frac{4\pi K}{c\gamma}(\tilde{j}_1 e^{i\psi}+C.C.)$$

- Es ist

$$cE_{x,y}=-\frac{\partial A_{x,y}}{\partial t}$$

und mit dem gewähltem Ansatz für $A_{x,y}$

$$\frac{\partial A_{x,y}}{\partial t}=i\omega\tilde{A}_{x,y}\exp\left(i\omega(\frac{z}{c}-t)\right)$$

Laserfeld

- Damit kann dann die Wellengleichung letztendlich in der Form

$$\frac{d}{dz}\tilde{E}(z) = -\frac{2\pi K}{c\gamma}\tilde{j}_1(z) \tag{29}$$

geschrieben werden.

- Jetzt kann man noch $\tilde{j}_1(z)$, dass durch Gleichung (27) geben ist, einsetzen.

Laserfeld

- Damit ist dann das Laserfeld durch folgende Gleichung gegeben

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{E}}{dz} &= \frac{\pi e j_0 K^2}{c\gamma^2}\int_0^z dz'\left\{\tilde{E}(z') + i\frac{4c\gamma^2}{\omega K^2}\frac{\tilde{E}(z')}{dz'}\right\} \\ &\times\int_{-\infty}^{\infty} dP\frac{dF(P)}{dP}\exp\left\{i\left(C+\frac{\omega P}{c\gamma_z^2 T_0}\right)(z'-z)\right\}\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\tilde{j}_1 &= i j_0\int_0^z dz'\left\{U+\frac{4\pi e\tilde{j}_1(z')}{\omega}\right\} \\ &\times\int dP\frac{dF(P)}{dP}\exp\left\{i\left[C+\frac{\omega P}{c\gamma_z^2 T_0}\right](z'-z)\right\}\end{aligned}$$

- Dies ist jetzt eine weitere Integro-Differentialgleichung, die die Entwicklung des Laserfeld entlang der Undulatorachse beschreibt.

Variablen Definition

Verstärkungsparameter $$\Gamma = \left(\frac{\pi j_0 K^2 \omega}{c\gamma_z^2 \gamma^3 I_A}\right)^{1/3}$$

Alfven Strom $$I_a = \frac{mc^3}{e} = 17kA$$

$$\hat{z} = \Gamma \cdot z$$

Detuning Parameter $$\hat{C} = C/\Gamma = \frac{1}{\Gamma}(k_u - \frac{\omega}{2c\gamma_z^2})$$

Raumladungsparameter $$\hat{\Lambda}_p^2 = \Lambda_p^2/\Gamma^2$$

$$\Lambda_p^2 = \frac{4\pi j_0}{\gamma_z^2 \gamma I_A}$$

Normierter Energieübertrag $$\hat{P} = \frac{T - T_0}{\rho T_0}$$

Effizienzparameter $$\rho = \frac{\gamma_z^2 \Gamma c}{\omega}$$

Normiertes Laserfeld Gleichung

Die Gleichung für das Laserfeld hat damit die folgende Form

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{E}}{d\hat{z}} &= \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' \left\{ \tilde{E}(\hat{z}') + i\hat{\Lambda}_p^2 \frac{d\tilde{E}(\hat{z}')}{d\hat{z}'} \right\} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P} \frac{d\hat{F}}{d\hat{P}} \exp\left\{ i(\hat{P} + \hat{C})(\hat{z}' - \hat{z}) \right\}\end{aligned} \tag{31}$$

und

$$\int \hat{F}(\hat{P}) d\hat{P} = 1$$

Energieverteilung

- Beispiel Energieverteilungsfunktion $F(P)$
  Gaussverteilung

$$
\begin{aligned}
F(T - T_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi < (\Delta T)^2 >}} \exp\left(-\frac{(T - T_0)^2}{2 < (\Delta T)^2 >}\right) \\
\Rightarrow \hat{F}(\hat{P}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda_T^2}} \exp\left(\frac{\hat{P}}{2\Lambda_T^2}\right) \\
\Lambda_T^2 &= \frac{< (\Delta T)^2 >}{\rho^2 T_0^2}
\end{aligned}
$$

- Es wurden bisher verschiedenen Näherungen gemacht, um die Gleichung (31) herzuleiten. Wann ist die Gleichung aber überhaupt gültig ?

Gültigkeitsbereich

- Annahme war, daß $\tilde{E}(z)$ und $\tilde{j}(z)$ langsam veränderliche Funktionen sind. Das bedeutet

$$\Gamma \left| \frac{d\tilde{E}}{d\hat{z}} \right| \ll k_u |\tilde{E}| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{d\tilde{E}}{dz} \right| \ll k_u |\tilde{E}|$$

$$\Gamma \left| \frac{d\tilde{j}}{d\hat{z}} \right| \ll k_u |\tilde{j}_1| \qquad \text{da } \hat{z} = \Gamma \cdot z$$

- Für den Effizienzparameter ρ gilt dann

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\gamma_z^2 c}{\omega} \Gamma \\ &= \frac{\gamma_z^2}{k_L} \cong \frac{\Gamma}{k_u} = \frac{K}{k_u \gamma_z} \left(\frac{\pi j_0 \omega}{c \gamma^3 I_A} \right)^{1/2} \\ \Rightarrow \rho \left| \frac{d\tilde{E}}{d\hat{z}} \right| &\ll |\tilde{E}| \end{aligned}$$

Gültigkeitsbereich

- Insgesamt läßt sich zeigen, daß im Rahmen der durchgeführten Näherungen
$$\left(\rho, \rho\hat{\Lambda}_T, \rho\hat{\Lambda}_P, \rho\hat{C}\right) \ll 1$$
gelten muß.
- Damit erhält man dann die Bedingung
$$\rho = \frac{\gamma_z^2 c}{\omega}\Gamma \cong \frac{\pi j_0 K^2}{k_u^2 \gamma I_A} \ll 1$$

Lösung der Laserfeld Gleichung

- Die Gleichung (31)

$$\frac{d\tilde{E}}{d\hat{z}} = \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' \left\{ \tilde{E}(\hat{z}') + i\hat{\Lambda}_p^2 \frac{d\tilde{E}(\hat{z}')}{d\hat{z}'} \right\} \times \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P} \frac{d\hat{F}}{d\hat{P}} \exp\left\{ i(\hat{P} + \hat{C})(\hat{z}' - \hat{z}) \right\}$$

  soll nun gelöst werden.
- Definition der Laplace Transformation

$$\tilde{E}(p) = \int_0^{\infty} d\hat{z} \exp(-p\hat{z}) \tilde{E}(\hat{z})$$

- Multiplikation von Gleichung (31) mit $\exp(-p\hat{z})$ ($\mathrm{Re}\,p > 0$) und Integration über $\hat{z}$ von 0 bis ∞.

Lösung der Laserfeld Gleichung

- Linke Seite von Gleichung 31

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{d\tilde{E}(\hat{z})}{d\hat{z}} \exp(-p\hat{z}) d\hat{z} &= \tilde{E}(\hat{z}) \exp(-p\hat{z}) \Big|_0^\infty \\
&\quad - \int_0^\infty \tilde{E}(\hat{z})(-p) \exp(-p\hat{z}) d\hat{z} \\
&= -\tilde{E}(0) + p\tilde{E}(p) \\
&= p\tilde{E}(p) - E_{\text{ext}}
\end{aligned}
$$

Lösung der Laserfeld Gleichung

- Rechte Seite der Gleichung

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty d\hat{z} \cdot e^{-p\hat{z}} \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' \left\{ \tilde{E}(\hat{z}') + i\hat{\Lambda}_p^2 \frac{d\tilde{E}(\hat{z}')}{d\hat{z}'} \right\} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^\infty d\hat{P} \frac{d\hat{F}}{d\hat{P}} \exp\left\{ i(\hat{P} + \hat{C})(\hat{z}' - \hat{z}) \right\} \\
&= \left\{ \tilde{E}(p) + i\hat{\Lambda}_p^2 (p\tilde{E}(p) - \tilde{E}_{\text{ext}}) \right\} \int_{-\infty}^\infty d\hat{P} \frac{\frac{d\hat{F}}{d\hat{P}}}{p + i(\hat{P} + \hat{C})}
\end{aligned}
$$

Lösung der Laserfeld Gleichung

- mit

$$
\begin{aligned}
& \int_0^\infty d\hat{z} \exp(-p\hat{z}) \left\{ \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' \tilde{E}(\hat{z}') \exp\left[i(\hat{P}+\hat{C})(\hat{z}'-\hat{z}) \right] \right\} \\
= & \int_0^\infty d\hat{z}' \tilde{E}(\hat{z}') \exp\left[i(\hat{P}+\hat{C})\hat{z}' \right] \cdot \int_{\hat{z}'}^\infty d\hat{z} \exp\left[-(p+i\hat{P}+i\hat{C})\hat{z} \right] \\
= & \frac{\tilde{E}(p)}{p+i(\hat{P}+\hat{C})}
\end{aligned}
$$

Lösung der Laserfeld Gleichung

- Mit der Definition

$$\hat{D} = \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P}' \frac{d\hat{F}}{d\hat{P}} \frac{1}{p + i(\hat{P} + \hat{C})} \tag{32}$$

wird Gleichung (31) dann zu

$$p\tilde{E}(p) - E_{\text{ext}} = \left\{ \tilde{E}(p) + i\hat{\Lambda}_p^2 \left(p\tilde{E}(p) - \tilde{E}_{\text{ext}} \right) \right\} \cdot \hat{D}$$

Lösung der Laserfeld Gleichung

- Umschreiben

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & p\tilde{E}(p) - \tilde{E}(p)\hat{D} - i\hat{\Lambda}_p^2 p\tilde{E}(p)\hat{D} = E_{\text{ext}} - i\hat{\Lambda}_p^2 E_{\text{ext}}\hat{D} \\
& = E_{\text{ext}}\left(1 - i\hat{\Lambda}_p^2\hat{D}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & \tilde{E}(p)\left(p - \hat{D} - i\hat{\Lambda}_p^2\hat{D}p\right) = E_{\text{ext}}\left(1 - i\hat{\Lambda}_p^2\hat{D}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & \tilde{E}(p) = E_{\text{ext}}\frac{1 - i\hat{\Lambda}_p^2\hat{D}}{p - \hat{D} - ip\hat{\Lambda}_p^2\hat{D}} \\
\Rightarrow \quad & \tilde{E}(p) = E_{\text{ext}}\left[p - \frac{\hat{D}}{1 - i\hat{\Lambda}_p^2\hat{D}}\right]
\end{aligned}
$$

Lösung der Laserfeld Gleichung

- Benötigt wird jetzt die Feldamplitude $\tilde{E}(\hat{z})$, die mit der inversen Laplace Transformation berechnet werden kann

$$\begin{aligned}\tilde{E}(\hat{z}) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha'-i\infty}^{\alpha'+i\infty} d\lambda \tilde{E}(\lambda)\exp(\lambda\hat{z}) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha'-i\infty}^{\alpha'+i\infty} d\lambda \exp(\lambda\hat{z})\left[\lambda - \frac{\hat{D}(\lambda)}{1 - i\hat{\Lambda}_p^2\hat{D}(\lambda)}\right] \qquad (33)\end{aligned}$$

  $\alpha' > 0$ reell und größer als alle Polstellen des Integranten. Die Integration erfolgt parallel zur imaginaeren Achse.
- Wir wollen zunächst den einfach Fall eines kalten Elektronenstrahls betrachten. Das heißt, das es eine scharfe Verteilung der Elektronenenergie gibt und somit die Verteilungsfunktion die folgende Form hat

$$\hat{F}(\hat{P}) = \delta(\hat{P})$$

FEL – Kalter Elektronenstrahl

- Für die Funktion (32) läßt sich dann schreiben

$$
\begin{aligned}
\hat{D}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P} \frac{\hat{F}'(\hat{P})}{\lambda + i(\hat{P} + \hat{C})} \\
&= \underbrace{\left. \frac{\hat{F}(\hat{P})}{\lambda + i(\hat{P} + \hat{C})} \right|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P} \frac{\hat{F}(p) \frac{d}{d\hat{P}}(\lambda + i(\hat{P} + \hat{C}))}{[\lambda + i(\hat{P} + \hat{C})]^2} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P} \frac{i\delta(\hat{P})}{[\lambda + i(\hat{P} + \hat{C})]^2} \\
&= i(\lambda + i\hat{C})^{-2}
\end{aligned}
$$

Lösung der Laserfeld Gleichung

- Damit ist das Feld aus Gleichung (31) durch

$$\tilde{E}(\hat{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha'-i\infty}^{\alpha'+i\infty} d\lambda \exp(\lambda \hat{z}) \left[\lambda - \frac{i}{(\lambda + i\hat{C})^2 + \hat{\Lambda}_p^2} \right]^{-1} \tag{34}$$

  gegeben
- Wie läßt sich diese Gleichung jetzt lösen ?

FEL – Kalter Elektronenstrahl

- Wenn der Faktor vor der $\exp(\lambda\hat{z})$-Funktion das Jordan'sche Lemma erfüllt kann das Integral mittels des Cauchy'sches Residum Theorem als eine Summe über Partialwellen geschrieben werden.

$$\left[\lambda - \frac{\hat{D}}{1 - i\hat{\Lambda}_p^2\hat{D}}\right]^{-1} = \left[\lambda - \frac{i}{(\lambda + i\hat{C}^2) + \hat{\Lambda}_p^2}\right]^{-1} \tag{35}$$

- Das Jordan Lemma sagt aus, daß das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}dx$$

0 ist, wenn für die Funktion $f(x)$ gilt

$$\lim_{R\to\infty} |f(R \cdot e^{i\theta})| = 0.$$

- Der Faktor (35) ist von der Ordnung $O(\lambda^{-1})$, so daß für $|\lambda| \to \infty$ das Jordan Lemma erfüllt ist.

FEL – Kalter Elektronen Strahl

- Damit kann das Integral (34) in eine Reihe

$$\tilde{E}(\hat{z}) = E_{\text{ext}} \sum_j \exp(\lambda_j \hat{z}) \left[\lambda - \frac{\hat{D}'_j}{1 - i\hat{\Lambda}_p^2 \hat{D}_j} \right]^{-1} \tag{36}$$

umgeschrieben werden, wobei

$$\hat{D}_j = \hat{D}|_{\lambda=\lambda_j} \text{ und } \hat{D}'_j = \left. \frac{d\hat{D}}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_j}$$

sind und λ_j die Lösungen von

$$\lambda - \frac{\hat{D}'_j}{1 - i\hat{\Lambda}_p^2 \hat{D}_j} = 0$$

sind.

FEL – Kalter Elektronenstrahl

- Für den kalten Elektronenstrahl gilt somit

$$\tilde{E}(\hat{z}) = E_{\text{ext}} \sum_j \frac{\exp(\lambda_j \hat{z})}{1 - 2i(\lambda_j + i\hat{C})\lambda_j^2} \tag{37}$$

$$\lambda = i\left[(\lambda + i\hat{C})^2 + \hat{\Lambda}_p^2\right]^{-1} \tag{38}$$

- Die λ_j sind somit die Lösung einer kubischen Gleichung. Für die Lösungen dieser kubischen Gleichung gilt

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = i$$
$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 = -\hat{C}^2 + \hat{\Lambda}_p^2$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -2i\hat{C}$$

FEL – Kalter Elektronenstrahl

- Einsetzen dieser Bedingungen in Gleichung (37) und Umformen liefert dann

$$\frac{\tilde{E}(\hat{z})}{E_{\text{ext}}} = \frac{\lambda_2\lambda_3 \exp(\lambda_1\hat{z})}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} + \frac{\lambda_1\lambda_3 \exp(\lambda_2\hat{z})}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)} + \frac{\lambda_1\lambda_2 \exp(\lambda_3\hat{z})}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)} \tag{39}$$

- Es soll nun der Fall eines sehr kleinen Raumladungsfeld $\hat{\Lambda}_p^2 \to 0$ direkt in der Resonanzposition $\hat{C} = 0$ betrachtet werden. Dann wird Gleichung (38) zu

$$\lambda = i\lambda^{-2} \Leftrightarrow \lambda^3 = i$$

FEL – Kalter Elektronenstrahl

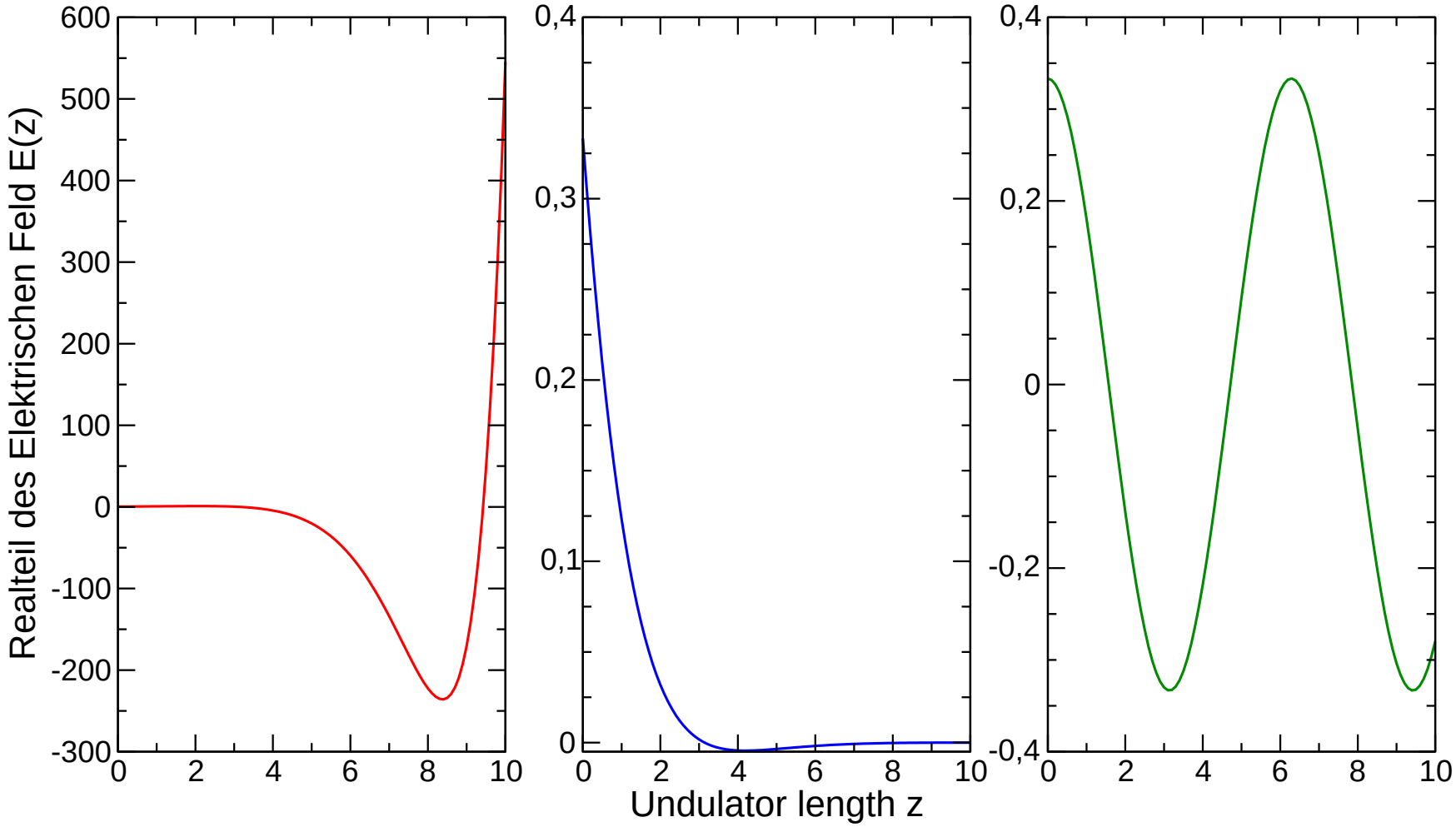
- Lösungen sind

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -i \\ \lambda_2 &= \frac{\sqrt{3}+i}{2} \\ \lambda_3 &= \frac{-\sqrt{3}+i}{2}\end{aligned}$$

- Für das Feld erhält man damit die folgende Lösung

$$\frac{\tilde{E}(\hat{z})}{E_{\text{ext}}} = \frac{1}{3}\left[\exp\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\hat{z}\right) + \exp\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\hat{z}\right) + \exp(-i\hat{z})\right]$$

FEL – Feld im linearen Bereich

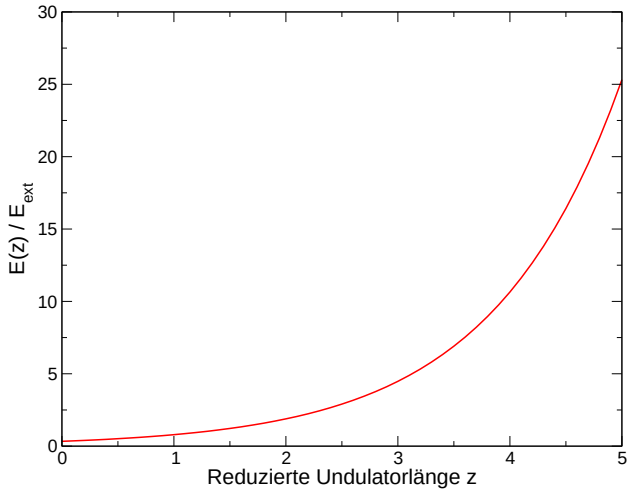


FEL – Feld im linearen Bereich

- Der 3. Term oszilliert und der 2. Term nimmt exponentiell ab Für den asympotischen Fall $\hat{z} > 1$ wird die Gleichung somit zu

$$\frac{\tilde{E}(\hat{z})}{E_{\text{ext}}} = \frac{1}{3} \exp\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\hat{z}\right)$$

- Mit zunehmender reduzierter Undulatorlänge $\hat{z}$ nimmt das elektrische Feld $\tilde{E}(\hat{z})$ also exponentiell zu! Verstärkung!



$$\begin{aligned} G &= \frac{|\tilde{E}|^2}{E_{\text{ext}}^2} \\ &= \frac{1}{9}\left[1 - 4\cosh\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{z}\left(\cosh\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{z} + \cos\frac{3}{2}\hat{z}\right)\right] \end{aligned}$$

FEL – Verstärkungsverhalten

- Im Gegensatz zum low Gain Bereich verstärkt der FEL im linearen Bereich direkt bei der Resonanzenergie $\hat{C} = 0$
- Im folgenden soll nun das Verstärkungsverhalten des FEL diskutiert werden.
  Dazu nehmen wir wieder zunächst ein verschwindenes Raumladungsfeld an $\hat{\Lambda}_p^2 \to 0$. Damit wird Geichung (35) zu

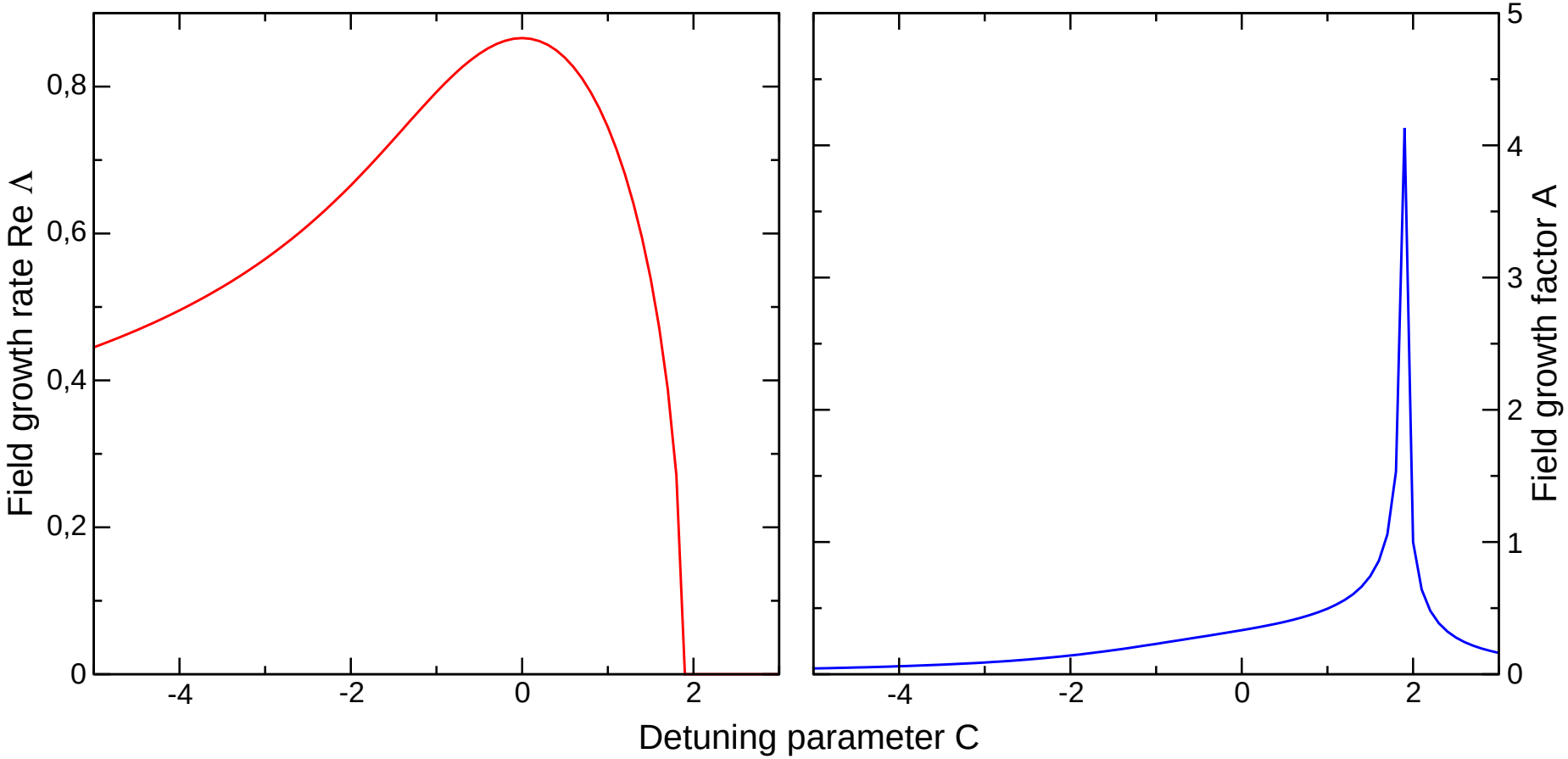
$$\lambda(\lambda + i\hat{C})^2 = i$$

- Die Propagationskonstanten λ_j hängen somit nur vom Detuning Parameter $\hat{C}$ ab. Lösung läßt sich im Prinzip explizit aufschreiben, wir wollen aber nur das Verhalten betrachten.
- $\hat{\Lambda}$ sei die Lösung λ_j, die dem exponentiellen Wachstum der Leistung entspricht
- Damit kann die Verstärkung dann einfach in der Form

$$G = A \cdot \exp(2Re\hat{\Lambda}\hat{z})$$

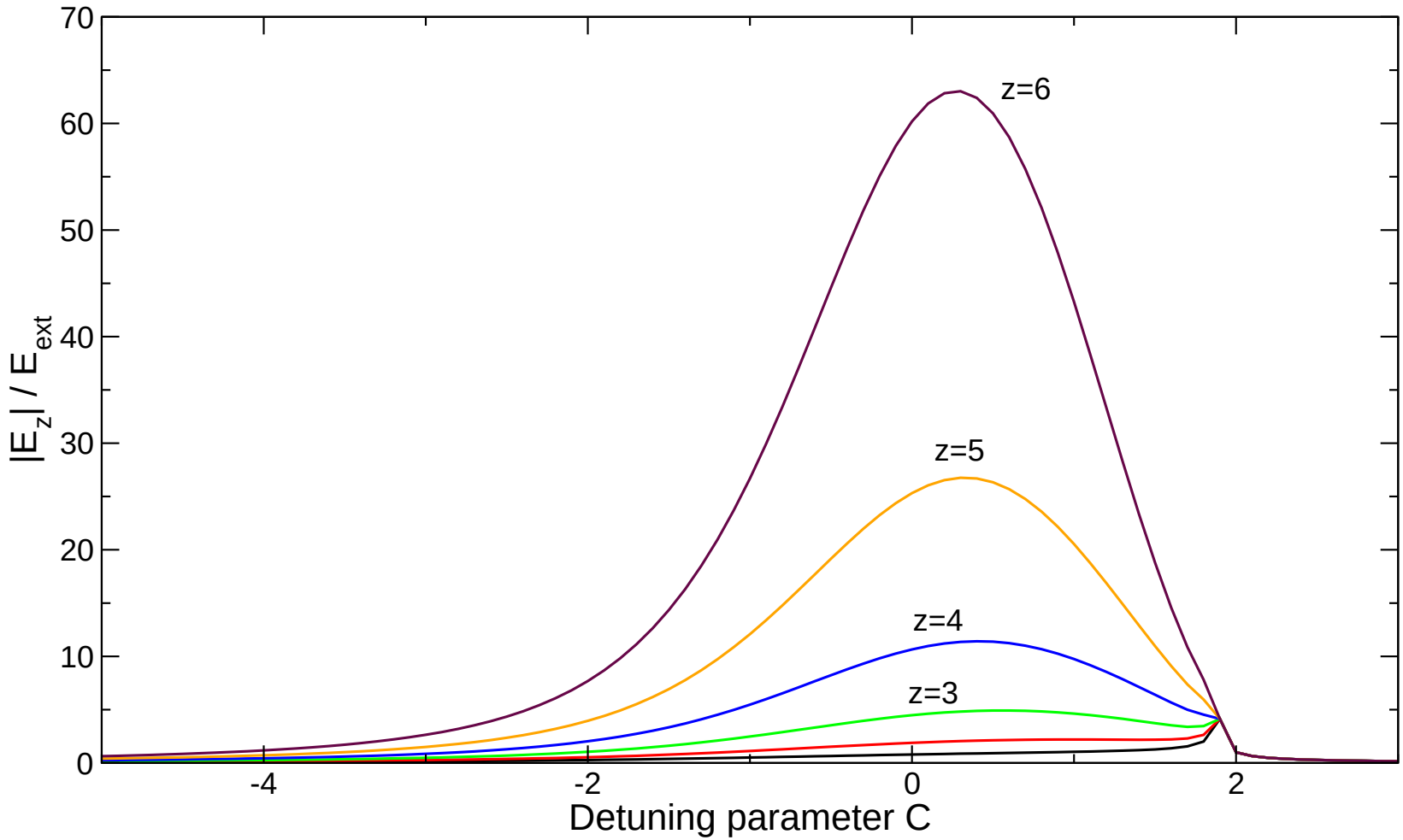
FEL – Verstärkungsverhalten

- $\hat{\Lambda}$: Field growth rate
  A : Input coupling factor



FEL – Verstärkungsverhalten

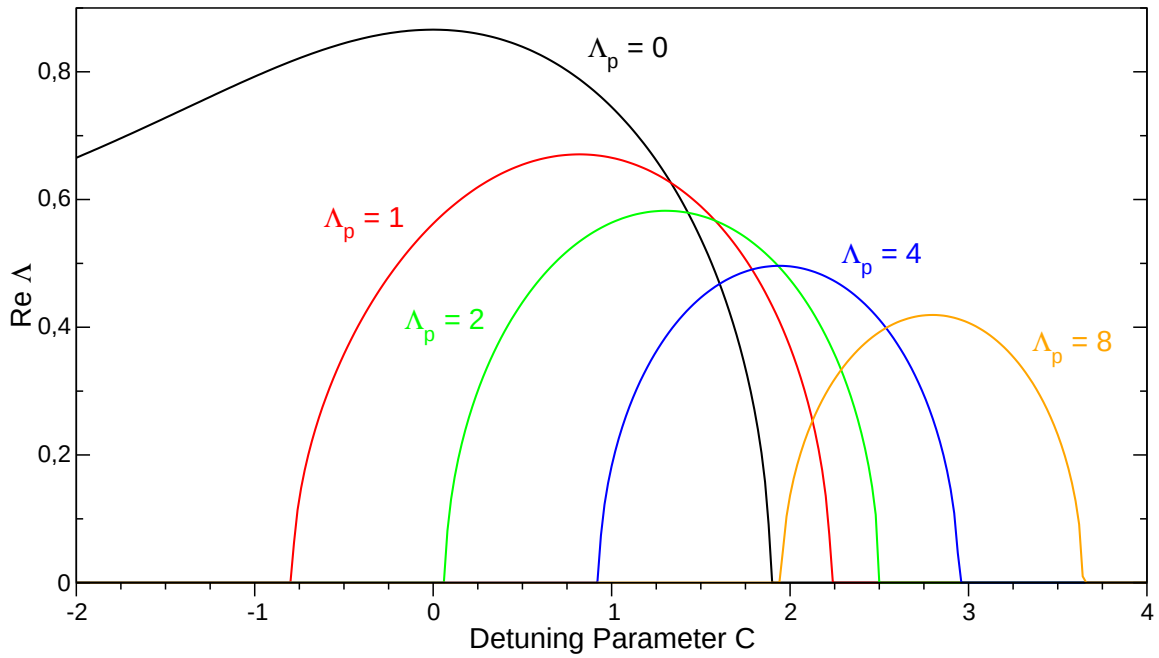
- Verstärkung des Feldes $\tilde{E}(\hat{z})$ bei verschiedenen Längen $\hat{z}$ des Undulators



FEL – Verstärkungsverhalten

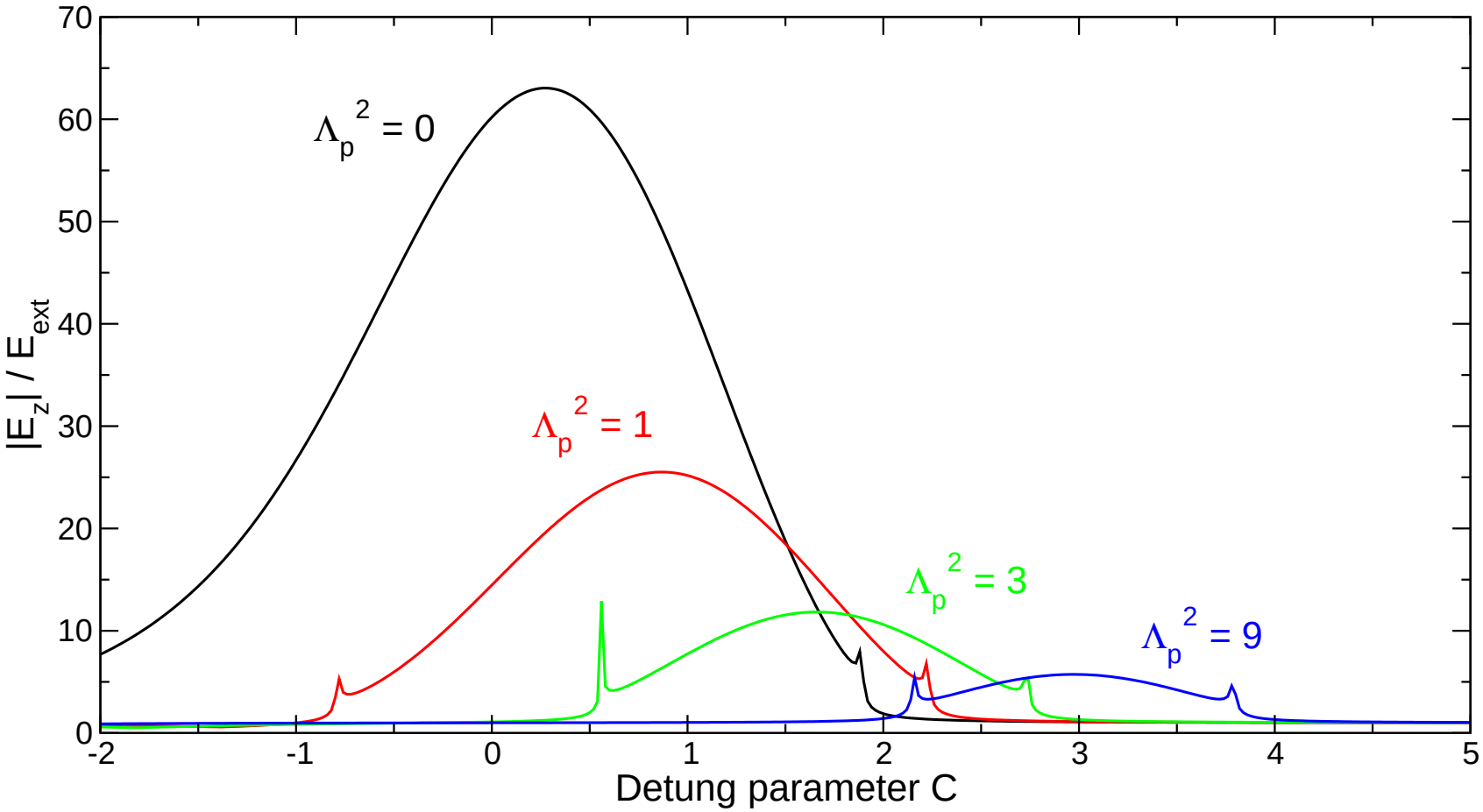
- Welchen Einfluß hat nun eine Raumladung $\hat{\Lambda}_p^2 > 0$ auf das Verstärkungsverhalten ?
- Dazu muß Gleichung (39) mit den korrekten Werten für die Eigenwerte der Gleichung (38) berechnet werden.

$$\lambda = i\left[(\lambda + i\hat{C})^2 + \hat{\Lambda}_p^2\right]^{-1}$$



FEL – Verstärkungsverhalten

- Für große Raumladungsfelder $\hat{\Lambda}_p^2$ wird somit die Verstärkung stark unterdrückt



FEL – Verstärkungsverhalten

- Das Maximum der Field growth rate $Re\hat{\Lambda}$ läßt sich durch

$$\max(Re\hat{\Lambda}) \cong \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{\hat{\Lambda}_p^2}{3}\right)$$

beschreiben. Das Maximum selbst wird bei einem Detuning Parameter

$$\hat{C}_m \cong \hat{\Lambda}_p$$

erreicht.

FEL – Verstärkungsverhalten

- Es soll jetzt als letzter Schritt der Einfluß einer Energieverteilung des Elektronenstrahls diskutiert werden. Bis jetzt wurde ein kalter Elektronenstrahl angenommen.
- Realistische Verteilung ist eine Gaussverteilung der Energie

$$\hat{F}(\hat{P}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\Lambda}_T^2}} \exp\left(-\frac{\hat{P}^2}{2\hat{\Lambda}_T^2}\right)$$

mit der Breite $\hat{\Lambda}_T^2$ der Verteilung.

- Das Feld ist durch Gleichung (33)

$$\tilde{E}(\hat{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha'-i\infty}^{\alpha'+i\infty} d\lambda \exp(\lambda\hat{z}) \left[\lambda - \frac{\hat{D}(\lambda)}{1 - i\hat{\Lambda}_p^2\hat{D}(\lambda)}\right]$$

gegeben

FEL – Verstärkungsverhalten

- mit $\hat{D}$

$$\hat{D}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{P} \frac{\hat{F}'(\hat{P})}{\lambda + i(\hat{P} + \hat{C})}.$$

- Die Rechnung soll jetzt hier nicht ausgeführt werden, sie ist z.B. in dem Buch von Saldin durchgeführt.

Das Ergebnis für das Feld im Fall einer Gaussverteilung der Elektronenenergie lautet

$$\frac{\tilde{E}(\hat{z})}{E_{\text{ext}}} = \exp(\hat{\Lambda}\hat{z}) \times \left\{ 1 + i(i - \hat{\Lambda}_p^2\hat{\Lambda})^2 \left[\left(\frac{\hat{\Lambda}}{i - \hat{\Lambda}_p^2\hat{\Lambda}} - \frac{1}{\hat{\Lambda}_T^2} \right) \times \left(\frac{1}{\hat{\Lambda} + i\hat{C}} - \frac{\hat{\Lambda} + i\hat{C}}{\hat{\Lambda}_T^2} \right) + \frac{\hat{\Lambda} + i\hat{C}}{\hat{\Lambda}_T^4} \right] \right\}^{-1} \tag{40}$$

FEL – Verstärkungsverhalten

- wobei $\hat{\Lambda}$ die Eigenwerte der Gleichung

$$\hat{D}(\hat{\Lambda}) = \frac{\hat{\Lambda}}{1 + i\hat{\Lambda}_p^2\hat{\Lambda}}$$

sind mit

$$\hat{D} = \frac{i}{\hat{\Lambda}_T^2} - \frac{i\sqrt{\pi/2}}{\hat{\Lambda}_T^3}(\lambda + i\hat{C})\exp\left[\frac{(\lambda + i\hat{C})^2}{2\hat{\Lambda}_T^2}\right] \times \left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{(\lambda + i\hat{C})}{2\hat{\Lambda}_T^2}\right)\right]$$

und der Fehlerfunktion

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x du\,\exp(-u^2)$$

FEL – FEL – Verstärkungsverhalten

- Wir wollen hier jetzt nur wieder den Fall eines verschwindenen Raumladungsfeld $\hat{\Lambda}_p^2 \to 0$ kurz diskutieren
- Für diesen Fall wird Gleichung (40) zu

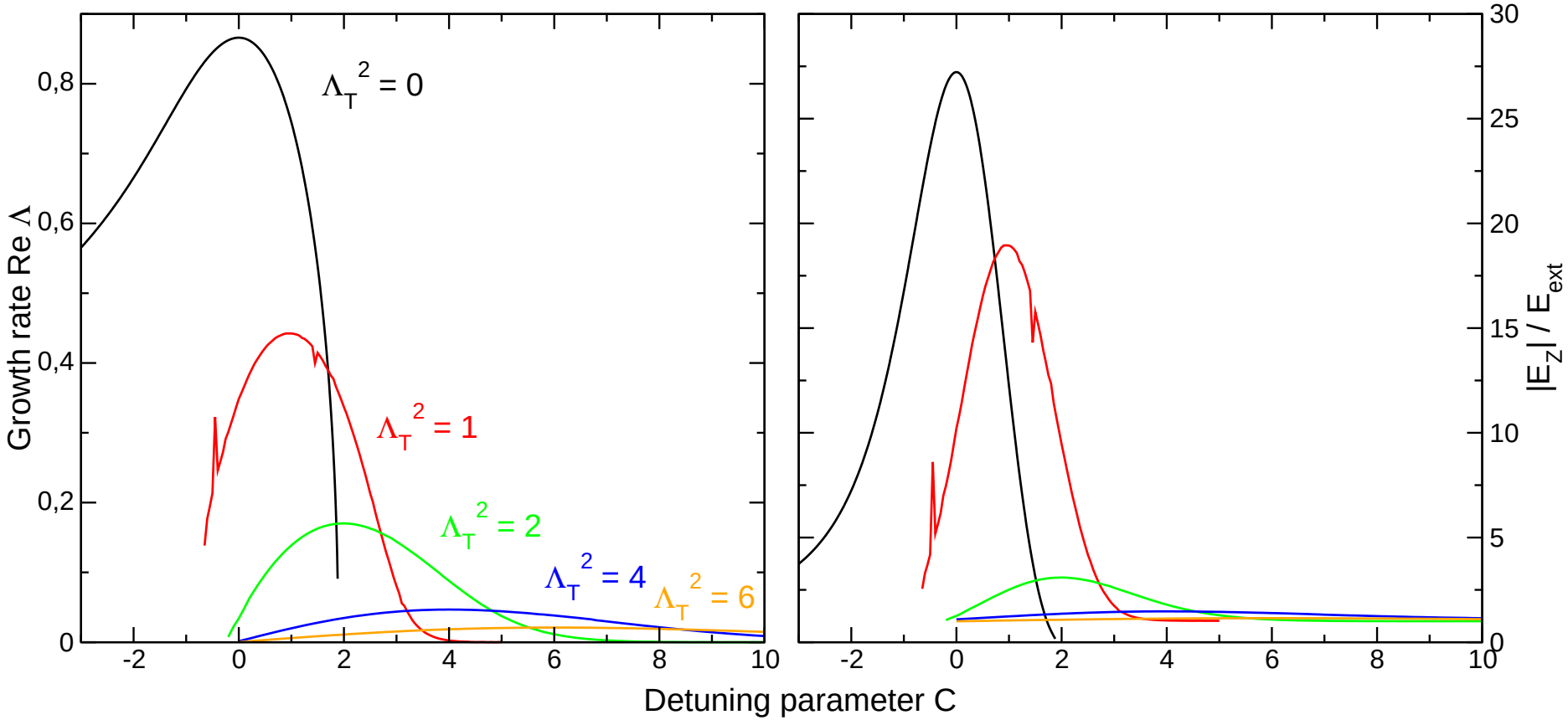
$$\frac{\tilde{E}(\hat{z})}{E_{\text{ext}}} = \frac{\hat{\Lambda}_T^2(\hat{\Lambda} + i\hat{C})}{i(\hat{C}\hat{\Lambda}_T^2 + 1) - \hat{\Lambda}(\hat{\Lambda} + i\hat{C})^2} \exp(\hat{\Lambda}\hat{z})$$

und $\hat{\Lambda}$ ist die Lösung der Eigenwertgleichung

$$\hat{\Lambda} = i \int_0^\infty dx \cdot x \cdot \exp\left(-\hat{\Lambda}_T^2 x^2/2 - (\hat{\Lambda} + i\hat{C})x\right)$$

FEL – Verstärkungsverhalten

- Growth rate und Feld des FEL bei verschiedenen Energieverteilungen des Elektronenstrahls



Take Home Message – FEL Linearer Bereich

- Herleitung des Laserfeldes und der Elektronenverteilung in einem 1-dimensionalen Modell.
- Gekoppelte Integrodifferentialgleichungen für die Elektronendichte und das Laserfeld.
- Lösung der Gleichungen zeigt ein exponentielles Wachstum des Laserfeldes.
- Verstärkung in einem schmalen Bereich um die Resonanzfrequenz.
- Ausgangsleistung hängt linear von der eingekoppelten Leistung E_0 ab.